PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1914. Redaktionsschluß für No. 11 am 16. Mai 1914. 15. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

F. Paschen u. W. Gerlach, Zur Frage nach dem elektrischen Analogon zum Zeemaneffekt. S. 489.

P. Debye u. J. Kern, Über die Behandlung gekoppelter Systeme nach der Methode der Eigenschwingungen. S. 490.

E. Schrödinger, Zur Theorie des Debyeeffekts. S. 497.

G. Nordström, Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen. S. 504.

J. Ishiwara, Grundlagen einer relativistischen elektromagnetischen Gravitationstheorie. II. S. 506.

H. Rohmann, Ein Röntgenspektroskop. S. 510.

The Svedberg, Über die Schwankungen in der von einer radioaktiven Lösung emittierten α-Strahlung. S. 512.

I. Langmuir, Thermionenströme im hohen Vakuum. II. Die Elektronenemission seitens des Wolframs und die Wirkung von Gasresten. S. 516.

W. Schottky, Die Wirkung der Raumladung auf Thermionenströme im hohen Vakuum. (Zu dem gleichnamigen Aufsatz von I. Langmuir.) S. 526.

A. Righi, Experimentaluntersuchungen über die magnetischen Strahlen in verschiedenen Gasen und Gasgemischen. I. S. 528.

G. Zemplén, Über die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle. S. 534.

H. Freundlich, W. Neumann u. H. Kaempfer, Über die Beeinflussung der Adsorption des Uran X_1 durch die Gegenwart von anderen Stoffen. S. 537.

Besprechungen:

J. Perrin, Die Atome. S. 542.

W. H. Bragg, Durchgang der α-, β-, γ- und Röntgenstrahlen durch Materie. S. 542.

S. Smiles, Chemische Konstitution und physikalische Eigenschaften. S. 543.

J. Stark, Die Atomionen chemischer Elemente und ihre Kanalstrahlenspektra. S. 543.

R. Blondlot, Einführung in die Thermodynamik. S. 543.

J. Blein, Optique géométrique. S. 543. Annuaire pour l'an 1914. S. 544.

Tagesereignisse. S. 544.

Personalien. S. 544.

Angebote. S. 544.

Gesuche. S. 544.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Frage nach dem elektrischen Analogon zum Zeemaneffekt.

Von F. Paschen und W. Gerlach.

Nach A. v. Malinowski[1]) ist die Anordnung von Mandelstam und G. v. Ubisch[2]) äußerst empfindlich, um Wellenlängenänderungen der Woodschen Resonanzstrahlung der Quecksilberlinie 2537 Å.-E. nachzuweisen. Nach ihm gibt ein Magnetfeld von 100 G. eine deutliche Änderung der Absorption der magnetisierten Resonanzlampe oder eine deutliche Änderung (von 1 Proz.) der Intensität dieser Lampe. Dies Magnetfeld bringt eine Aufspaltung von etwa 5×10^{-4} Å.-E. hervor. Wir haben die Intensität dieser Resonanzstrahlung dadurch vermehrt, daß die erregende Amalgam-Quecksilberlampe durch seitliches Anblasen mit einem Ventilator gekühlt wurde, und konnten so Ausschläge des Elektrometers von 2000 bis 3000 Skalenteilen auf $^1/_2$ Promille genau bestimmen bzw. konstant halten. Dadurch wurde es möglich, Änderungen der Resonanzstrahlung von 1 Promille mit Sicherheit wahrzunehmen. Diese würden also einer magnetischen Aufspaltung von 5×10^{-5} Å.-E. entsprechen.

Es lag nahe, dies Phänomen, dessen Empfindlichkeit die aller Interferenzspektroskope übertrifft, zu benutzen, um nach einer Änderung der Wellenlänge durch elektrische Kräfte zu suchen, besonders da diese Lichtquelle hohen elektrischen Feldern ausgesetzt werden kann, ohne daß dadurch in ihr sekundär störende Vorgänge entstehen.

Wir haben drei verschiedene Versuche gemacht. Beim ersten wurde die Resonanzlampe so angeordnet, daß der lumineszierende Quecksilberdampf einem elektrischen Felde unterworfen wurde. Man beobachtete dann erstens, ob die Resonanzstrahlung selber sich änderte. Dies wäre ein Analogon zu dem Versuche Malinowskis, der seine Kurve I ergab. Zweitens ließ man die Resonanzstrahlung dieser Lampe durch eine kleine mit Quecksilberdampf von Zimmertemperatur gefüllte Absorptionszelle gehen und beobachtete, ob die Absorption sich durch Elektrisieren der Resonanzlampe änderte (analog zu Kurve 2 von Malinowski). Drittens wurde das Absorptionsgefäß innen mit einem Kondensator versehen. Man beobachtete, ob die Absorption der unveränderten Resonanzlampe durch Elektrisieren des absorbierenden Dampfes geändert wurde. Mit anderen Worten, wir suchten erstens nach einer Wellenlängenänderung des Resonanzlichtes durch Einbringen der Lichtquelle in ein elektrisches Feld, zweitens nach einer Wellenlängenänderung der Absorptionslinie durch Einbringen der absorbierenden Schicht in ein elektrisches Feld.

Durch Nähern eines Magnets von bekanntem magnetischen Moment überzeugten wir uns von der Empfindlichkeit der Anordnung. Wir fanden, daß ein Magnetfeld von 51 G., welches parallel

1) A. v. Malinowski, diese Zeitschr. **14**, 884, 1913.
2) L. Mandelstam, diese Zeitschr. **11**, 752, 1910; G. v. Ubisch, diese Zeitschr. **11**, 753, 1910.

der Beobachtungsrichtung am Orte der Resonanzlampe erzeugt wurde, eine Vermehrung um 6 Promille ihrer Strahlung hervorbrachte, in Übereinstimmung mit Malinowski.

Die mit Kondensator versehene Resonanzlampe bestand aus einem 35 mm weiten, 50 mm langen Glasrohre. Dies hatte zwei senkrecht zueinander stehende Ansätze von 19 mm Weite und ein zur Pumpe führendes drittes Rohr. In die beiden ersten Seitenrohre wurden zwei innen mit runden Quarzplatten verschlossene Glasrohre eingekittet. Die Austrittsplatte reichte bis zur Mitte der das erregende Licht einlassenden Platte. Diese Quarzplatten befanden sich zwischen den zwei Kondensatorplatten, deren Abstand 21 mm war.

Die Kondensatorplatten im Absorptionsgefäße waren rechteckige Platten im Abstand von 6 mm, die bis an die Quarzverschlußplatten heranreichten. Eine Blende ließ das Licht nur zwischen den Platten hindurch. Das Absorptionsrohr ließ sich mittels eines Schliffes aus dem Strahlengang entfernen. Die Richtung des elektrischen Feldes war also stets senkrecht zum Strahlengang.

Das elektrische Feld wurde durch eine mit Motor getriebene Influenzmaschine geliefert, der eine Kapazität von 20000 cm parallel lag, und durch ein mit Funkenpotentialen geeichtes Braunsches Elektrometer gemessen. Die Isolierung des Quecksilberdampfes von Zimmertemperatur im Vakuum war vollkommen bis zu Feldern von 15000 Volt/cm. Die Isolierung der übrigen Anordnung war eine sehr gute. Man steigerte langsam das Feld und ließ es unterhalb des Entladungspotentials für genaue Beobachtungen lange bestehen. Der elektrostatische Schutz der photoelektrischen Zelle war so gut, daß man auch sehen konnte, ob eine plötzliche Beseitigung des Feldes irgendeine Änderung brachte.

Resultate: 1. Absorption im elektrischen Felde. Der Ausschlag der Resonanzlampe allein betrug wegen der günstigen Form der hier benutzten Resonanzlampe 1000 bis 3000 mm. Er ging bei Einschaltung des Absorptionstroges von 22 mm Länge zurück auf 2 bis $2^1/_2$ Proz. (abhängig von Temperatur und Vakuum). Es blieben Ausschläge von 20 bis 50 mm. Ein elektrisches Feld von 100 bis zu 14500 Volt/cm brachte keine bemerkbare Änderung an dem durchgelassenen Lichte hervor, mit Sicherheit nicht eine solche von 2 mm.

Es wurde also der absorbierte Betrag von mindestens 2000 mm nicht um 2 mm geändert. Eine Änderung um 1 Promille durch magnetische Felder würde nach unserem Magnetversuche einer Aufspaltung der Linie um 4×10^{-5} Å.-E. entsprechen. Um diesen Betrag wurde also die Wellenlänge der Absorptionslinie mit Sicherheit nicht verändert, wenn der absorbierende Dampf elektrischen Feldern bis zu 14500 Volt/cm ausgesetzt wurde.

Die beiden anderen Versuche, welche die Elektrisierung des emittierenden Dampfes betreffen, ergaben ebenso keinerlei Änderungen durch das Feld.

1. Die Intensität der Resonanzlampe änderte sich in Feldern bis zu 12000 Volt/cm nicht. Bemerkbar wäre eine Änderung derselben um 0,7 Proz. gewesen.

2. Die Absorption des Lichtes der Resonanzlampe in einem nicht elektrisierten Absorptionsgefäße änderte sich nicht bemerkbar, wenn der emittierende Dampf elektrisiert wurde, z. B. durch Felder von 6000 Volt/cm nicht um 5 Promille.

Nach den Erörterungen von W. Voigt[1]) konnten wir nicht erwarten, irgendeine Andeutung des eigentlichen elektrischen Zeemaneffekts zu erhalten. Denn derselbe würde bei den angewandten Feldern und bei der Größe der benutzten Schwingungszahl nach diesen Erörterungen jedenfalls kleiner sein müssen, als die für uns bemerkbare Grenze. Wenn andererseits der von J. Stark[2]) neuerdings entdeckte Effekt das elektrische Analogon des Zeemaneffekts wäre, so hätten wir bereits bei 100000mal kleineren Feldern, als wir anwandten, eine Änderung erhalten müssen. So, wie nach W. Wien[3]) ein Magnetfeld an gewissen Spektrallinien der Kanalstrahlen einen dem Starkeffekt analogen Effekt hervorbringt, der von anderer Größenordnung ist, als der eigentliche Zeemaneffekt, so wird man auch das elektrische Analogon zu dem eigentlichen Zeemaneffekt als von anderer Größenordnung und als ein anderes Phänomen ansehen müssen, als die merkwürdigen Veränderungen, welche nach Stark[4]) durch ein elektrisches Feld an einigen von Kanalstrahlen emittierten Linien des Wasserstoffs, Heliums und Lithiums[4]) hervorgebracht werden.

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, S. 356 u. 380, 1908.
2) J. Stark, Berl. Ber. 20. Nov. 1913.
3) W. Wien, Berl. Ber. 22. Januar 1914.
4) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. **43**, 1017, 1914.

(Eingegangen 9. April 1914.)

Über die Behandlung gekoppelter Systeme nach der Methode der Eigenschwingungen.

Von P. Debye und J. Kern.

§ 1. Allgemeine Übersicht.

Herr Born hat kürzlich in dieser Zeitschrift[1]) Betrachtungen angestellt über das „akustische

1) Diese Zeitschr. **15**, 185, 1914.

Spektrum" eines zusammengesetzten Systems, bestehend aus zwei Einzelsystemen (jedes durch eine eigene Kompressibilität und Dichte charakterisiert), welche in einer Grenzfläche aneinanderstoßen.

Seine Rechnung besteht aus zwei wesentlich voneinander getrennten Teilen. Indem er zunächst stetige Raumerfüllung voraussetzt, berechnet er erstens auf Grund dieser Annahme das akustische Spektrum des Doppelsystems. Dieses Spektrum ist dann notgedrungen unendlich lang, d. h. es erstreckt sich bis zu beliebig großem Werte der Schwingungszahl. Gegen diesen ersten Teil der Rechnung haben wir absolut nichts einzuwenden.

Zweitens aber versucht er, auf der eben angedeuteten Rechnung fußend, dasjenige akustische Spektrum anzunähern, das sich für das molekular gebaute Doppelsystem ergeben muß. Er führt diese Rechnung so aus, daß er das Gesamtspektrum abschneidet an derjenigen Stelle, wo die Anzahl „Spektrallinien" den Wert erreicht hat, den sie, der Anzahl molekular gerechneter Freiheitsgrade entsprechend, haben muß. Er führt also bei dem Doppelsystem eine einzige Grenzfrequenz ein.

Die ganze Rechnung zusammengenommen führt dann zu dem Schluß, daß die freie Energie des Doppelsystems keine lineare Funktion der Massen der Einzelsysteme ist, was natürlich mit allen experimentellen Ergebnissen in flagrantem Widerspruch steht.

Nun erhebt sich die Frage: An welcher Stelle und wie muß man die Bornsche Rechnung abändern, damit man ein getreues Bild der Wirklichkeit erhält?

Würde die ganze Rechnung aus einer Aneinanderreihung rein mathematischer Schlüsse bestehen, dann wäre freilich, die logische Richtigkeit der Schlüsse vorausgesetzt, kein Platz für ein solches Eingreifen in die Rechnung selbst. Aber das ist durchaus nicht der Fall. Das oben an zweiter Stelle genannte Abschneiden des Gesamtspektrums an der einen von Born bevorzugten Stelle ist bis zu gewissem Grade ein willkürlicher, nur durch ein der Rechnung fremdes physikalisches Gefühl diktierter Akt. Man will schließlich mittels dieses Abschneideverfahrens das ursprünglich für den Körper mit stetiger Raumerfüllung berechnete Spektrum dem unbekannten, aber sicher existierenden Spektrum des wirklichen, molekularen Körpers ähnlich machen. Von vornherein nun ist es gar nicht gesagt, daß dieses durch den von Born ausgeführten Schnitt in seinem Falle gelingt, trotzdem er sich darauf berufen kann, daß genau dieser Schnitt für einen einatomigen Einzelkörper einen guten Erfolg gehabt hat.

Diese Überlegung führt uns auf den Standpunkt, den wir dem zweiten Teil der Bornschen Rechnung gegenüber einzunehmen haben. Wir werden versuchen müssen, zuerst etwas Genaueres über den wirklichen Verlauf des Spektrums des molekularen Doppelsystems zu erfahren und können dann erst nachträglich das Schnittverfahren jener Kenntnis entsprechend einzurichten suchen.

Im Anschluß an diese Fassung zerlegen wir die jetzt folgende Auseinandersetzung in zwei Stücke a) und b).

a) Die gegenseitige Beeinflussung der Teile eines Doppelsystems.

Vorläufig halten wir mit Born fest an der Fiktion einer stetigen Raumerfüllung und nennen die beiden Einzelsysteme 1 und 2. Dieselben sollen zunächst nicht miteinander in Zusammenhang stehen. Wir können dann für jedes dieser Systeme ein akustisches Spektrum zeichnen, etwa in der Art, daß wir z. B. für den Körper 1 senkrecht zu einer ν-Achse an jeder Stelle ν, die einer Eigenschwingung des betreffenden Körpers entspricht, einen zu dieser ν-Linie senkrechten Strich anbringen. So erhalten wir für die zwei Einzelsysteme zwei Spektren 1 und 2 mit mikroskopischer Genauigkeit dargestellt. Nachdem diese beiden Figuren entworfen sind, bringen wir die Körper 1 und 2 miteinander in Zusammenhang und entwerfen für das Doppelsystem ebenfalls ein Spektrum, das Spektrum 1—2. Dieses Spektrum hat Born ausgerechnet. Die gedachte mikroskopisch genaue Zeichnung desselben zeigt klar erkennbare Unterschiede gegenüber dem, was wir bekommen würden, wenn wir einfach die beiden Spektren 1 und 2 einander überlagern würden. Das geht unzweideutig aus der Bornschen Rechnung hervor.

Nun ist aber für die an dieser Stelle anzuschließende Berechnung der freien Energie die mikroskopische Kenntnis jenes Spektrums 1—2 nicht nötig. Vielmehr genügt es, die Dichte der Verteilung der Spektrallinien durch eine stetige Kurve darzustellen, die uns darüber unterrichtet, wie groß die Zahl der Linien ist auf ein beliebig gewähltes Stück $\Delta\nu$ der ν-Achse, wenn wir jenes Stück einerseits zwar klein gegen die Gesamtausdehnung des Spektrums, aber doch andererseits immerhin so groß wählen, daß darauf noch eine große Zahl von Linien entfällt. Man stellt sich also gewissermaßen in einem so großen Abstand der entworfenen, mikroskopisch genauen Bilder, daß die einzelnen Spektrallinien nicht mehr zu erkennen sind und man den Eindruck einer gleichmäßigen, aber von Ort zu Ort verschiedenen Schwärzung bekommt. Auch das, was man nun sehen wird, hat Born ausgerechnet.

Er findet, daß, wenn man die Bilder in dieser Weise betrachtet, das Spektrum 1—2 des Doppelsystems wohl entstanden gedacht werden kann durch Übereinanderlagerung der Spektren 1 und 2 der Einzelsysteme. Mit anderen Worten. Die Verbindung der beiden Systeme zu einem einzigen liefert ganz gewiß ein neues Spektrum, aber der Zusammenhang mit den Einzelspektren 1 und 2 ist doch so weitgehend, daß man nicht mehr unterscheiden kann, ob man mit einem neuen Spektrum oder mit einer Übereinanderlagerung der Spektren 1 und 2 zu tun hat, sofern man nur auf die Verteilungsdichte der Linien achtet (vgl. Formel (13) bei Born).

Das Endresultat dieser Betrachtung a) können wir also zusammenfassen in der Form:

Born hat bewiesen, daß zwei kontinuierliche, miteinander gekoppelte Einzelsysteme Anlaß geben zu einer Spektralverteilung, deren makroskopisches Bild erhalten wird durch Übereinanderlagerung der zu den freien Einzelkörpern gehörigen Verteilungen.

b) Das Spektrum und die freie Energie eines wirklichen Doppelsystems.

Wollen wir nunmehr die Berechnung irgendeiner thermodynamischen Funktion des wirklichen Körpers ausführen, dann wird es nötig, sich klar zu machen, wie das Spektrum des molekularen Systems gebaut ist. Es scheint uns nun durchaus angebracht, den eben genannten Satz auch auf das molekulare System zu übertragen. Tun wir das, dann verschwinden alle Schwierigkeiten sofort. Tatsächlich bekommt man doch z. B. die freie Energie, indem man jede Einzellinie des Spektrums zum gesuchten Gesamtwert rein additiv beitragen läßt mit einem Betrag, der nur von ihrer Schwingungszahl abhängt. Entsteht die Spektralverteilung des Doppelsystems nun, wie wir annehmen, durch Addition der Spektralverteilungen der freien Einzelsysteme, dann entsteht eben auch z. B. die freie Energie durch Addition der Beträge, die jedes der Einzelsysteme für sich an freier Energie besitzen würde, oder anders: die freie Energie ist eine lineare Funktion der Massen der Bestandteile.

Das von Born benutze Abschneideverfahren verstößt gegen den oben genannten Satz, denn es soll danach (vgl. die Formeln unter 9 bei Born) durch Koppelung eine Grenzschwingungszahl ν_m entstehen, die an einer Stelle zwischen den Grenzschwingungszahlen der Einzelsysteme liegt, bestimmt durch das gerade vorhandene Massenverhältnis. Die Kopplung soll also im allgemeinen sehr starke Verzerrungen der Einzelspektra bewirken können.

Nun ist zwar der obige Satz von Born nur für ein kontinuierliches Doppelsystem bewiesen, aber es scheint uns schon ohne weitere Überlegung viel wahrscheinlicher, daß man jenen Satz auch auf molekular gebaute Systeme übertragen darf, als, wie es Born tut, ein weiter nicht begründetes, willkürliches Abschneideverfahren einzuführen. Wissen wir doch, daß die makroskopische Spektralverteilung eines Einzelkörpers gänzlich unabhängig ist von der besonderen Wahl der Oberflächenbedingungen. Von hier bis zu der Behauptung, auch bei räumlichen Doppelsystemen, die nur durch Oberflächenbedingungen miteinander gekoppelt sind, sei der Einfluß dieser Kopplung verschwindend, ist unseres Erachtens ein nicht gewagter Schritt.

Trotzdem wollten wir uns nicht mit dieser einfachen Konstatierung begnügen und haben einen besonderen Fall molekular gebauter Körper in seinen Einzelheiten durchgerechnet. Als solchen wählten wir zwei lineare Körper (Seiten) mit verschiedenen Massen der konstituierenden Atome und verschiedener quasielastischer Bindung. Die Kopplung ist beliebig stark. Tatsächlich ergibt sich das erwartete Resultat, wie wir in den folgenden Paragraphen zeigen wollen[1]).

§ 2. Die Rechnung für eine „zweiphasige" Kette.

Es möge Fig. 1 eine Kette von Massenpunkten darstellen, deren Endpunkte 1 und

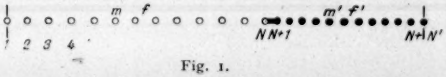


Fig. 1.

$N + N'$ fest sind. Die Massenpunkte 1 bis N mögen die Massen m haben; die Elastizitätskonstante dieses Teils der Kette sei f. Die Punkte $N + 1$ bis $N + N'$ mögen die Massen m' haben; die Elastizitätskonstante ihrer Bindung sei f'. Die Elastizitätskonstante der Kopplung zwischen den Massen N und $N + 1$ sei q.

Bezeichnen wir mit ξ die kleinen Verschiebungen der Punkte aus ihren Gleichgewichtslagen (wobei wir voraussetzen, daß dieselben

1) Herr M. Born, mit dem wir inzwischen noch über die vorliegende Frage korrespondieren konnten, hat sich mit der vorgeschlagenen Lösung einverstanden erklären können. Mit seiner Notiz verfolgte Herr Born hauptsächlich den Zweck, zu zeigen, daß eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Debyeschen Verfahrens mit Vorsicht zu geschehen habe, wolle man nicht auf Widersprüche stoßen. Beiderseits sind wir indessen von vornherein darüber einig gewesen, daß die richtig angewandte Methode der Eigenschwingungen zu vernünftigen Resultaten führen müsse.

nur in einer Achse erfolgen), so ist die kinetische Energie des Systems:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \cdots \dot{\xi}_{N-1}^2 + \dot{\xi}_N^2) + \\ + \frac{m'}{2}(\dot{\xi}_{N+1}^2 + \dot{\xi}_{N+2}^2 + \cdots \dot{\xi}_{N+N'}^2),$$

die potentielle Energie:

$$V = \frac{f}{2}[(\xi_2 - \xi_1)^2 + \cdots (\xi_N - \xi_{N-1})^2] + \\ + \frac{\varphi}{2}(\xi_{N+1} - \xi_N)^2 + \frac{f'}{2}[(\xi_{N+2} - \xi_{N+1})^2 + \\ + \cdots (\xi_{N+N'} - \xi_{N+N'-1})^2].$$

Nach dem Verfahren von Lagrange erhalten wir aus diesen Ansätzen das System der Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\xi}_1 = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$m\ddot{\xi}_{N-1} = -f(\xi_{N-1} - \xi_{N-2}) + f(\xi_N - \xi_{N-1})$$
$$m\ddot{\xi}_N = -f(\xi_N - \xi_{N-1}) + \varphi(\xi_{N+1} - \xi_N)$$
$$m'\ddot{\xi}_{N+1} = -\varphi(\xi_{N+1} - \xi_N) + f'(\xi_{N+2} - \xi_{N+1})$$
$$m'\ddot{\xi}_{N+2} = -f'(\xi_{N+2} - \xi_{N+1}) + f'(\xi_{N+3} - \xi_{N+2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_{N+N'} = 0$$

In diesem System stellen die Gleichungen (N) und $(N+1)$ die Kopplungsgleichungen zwischen den beiden Systemen m, f und m', f' dar.

Wir setzen ξ zeitlich periodisch an in der Form $\xi_n = u_n e^{i\omega t}$; damit verwandelt sich unser Gleichungssystem dann in das folgende System linear homogener Gleichungen:

$$u_1 = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$(2f - m\omega^2)u_{N-1} = f(u_{N-2} + u_N)$$
$$[(f + \varphi) - m\omega^2]u_N = fu_{N-1} + \varphi u_{N+1}$$
$$[(\varphi + f') - m'\omega^2]u_{N+1} = \varphi u_N + f' u_{N+2}$$
$$(2f' - m'\omega^2)u_{N+2} = f'(u_{N+1} + u_{N+3})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{N+N'} = 0.$$

Macht man nun für die Massenpunkte von 1 bis N den Ansatz:

$$u_n = \Gamma \sin(n-1)\alpha \qquad \text{(a)}$$

und setzt für die Punkte $N+1$ bis $N+N'$ entsprechend:

$$u_n = \Gamma' \sin(n - N - N')\alpha, \qquad \text{(a')}$$

dann sind die Enden der Kette unbeweglich eingeklemmt, wie es die erste und die letzte Gleichung unseres Systems verlangen. Damit die Ansätze (α) und (α') auch die Gleichungen (2) bis $(N-1)$ und $(N+2)$ bis $(N+N'-1)$ erfüllen, muß außerdem

$$2f(1 - \cos\alpha) = m\omega^2, \qquad (1)$$
$$2f'(1 - \cos\alpha') = m'\omega^2 \qquad (2)$$

sein.

Das Gleichungspaar (1), (2) liefert uns eine erste Gleichung zur Bestimmung der Phasen α und α', nämlich:

$$\frac{f}{m}(1 - \cos\alpha) = \frac{f'}{m'}(1 - \cos\alpha'),$$

oder auch

$$\omega_0^2(1 - \cos\alpha) = \omega_0'^2(1 - \cos\alpha'), \qquad \text{(I)}$$

wenn wir die höchste Frequenz, die jeder Teil unseres Systems für sich besitzt, mit ω_0 bzw. ω_0' bezeichnen.

Schließlich müssen die Ansätze (a) und (a') auch das Paar der „Kopplungsgleichungen" (N) und $(N+1)$ erfüllen, was uns eine zweite Beziehung zwischen α und α' liefern wird.

Setzt man nämlich jene Ansätze (a) und (a') in (N) und $(N+1)$ ein, dann erhält man zwei Gleichungen, welche in bekannter Weise bei endlichen Werten von Γ und Γ' nur dadurch zu erfüllen sind, daß ihre Determinante verschwindet. Unter Berücksichtigung von (1) und (2) läßt sich diese zweite Beziehung zwischen α und α' auf die Form bringen:

$$0 = \begin{vmatrix} f\{\sin N\alpha - \sin(N-1)\alpha\} + \varphi\sin(N-1)\alpha & \varphi\sin(N'-1)\alpha' \\ \varphi\sin(N-1)\alpha & f'\{\sin N'\alpha' - \sin(N'-1)\alpha'\} + \varphi\sin(N'-1)\alpha' \end{vmatrix}. \qquad \text{(II)}$$

Damit haben wir die zweite Beziehung zwischen α und α' erhalten, und das Problem der Bestimmung des Spektrums unserer Kette ist gelöst. Denn aus (I) und (II) können wir α und α' berechnen, und nachdem dieses geschehen, irgendeine der Gleichungen (1) und (2) dazu benutzen, um die zu diesen Phasenwerten gehörige Schwingungszahl ω zu berechnen.

§ 3. Spezialisierung des Gleichungssystems auf einen vereinfachten Fall.

Wir wollen unser Gleichungssystem (I) und (II) auf einen Fall spezialisieren, der eine bequemere Diskussion gestattet und doch alle wesentlichen Züge, auf die es uns hier ankommt, zeigen muß. Wir wählen zunächst die Kopplung der beiden Systeme unendlich stark, d. h. wir denken uns die beiden Massen N und $N+1$ starr miteinander verbunden und setzen deshalb $\varphi = \infty$. Wir sind dann sicher, daß der Effekt irgendeiner endlichen Größe der Kopplung der beiden Massensysteme (Phasen) jedenfalls nicht größer sein kann als der, den wir unter unserer Annahme ableiten werden.

Ferner wählen wir $f = f'$. Diese Spezialisierung läßt Gleichung (I) unberührt, denn es

bleibt $\omega_0^2 + \omega_0'^2$; für die Ungleichheit der Grenzschwingungsfrequenz beider Phasen, auf die es uns allein ankommt, ist schon durch die Ungleichheit der Massen Gewähr geleistet. Was die zweite Gleichung betrifft, so werden wir nachher an der Hand der Figuren leicht sehen, daß der Übergang zum allgemeinen Fall $f \neq f'$ nichts als eine mikroskopische Deformation des gefundenen Spektrums bedeutet.

Setzen wir also in den Gleichungen (I) und (II) $f = f'$ und $\varphi = \infty$, so erhalten wir nach leichter Rechnung zur Bestimmung von α und α' das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{ll} (1-\cos\alpha) = p^2(1-\cos\alpha') & (\mathrm{I}') \\ \dfrac{\sin(N\alpha)}{\sin(N-1)\alpha} = -\dfrac{\sin(N'\alpha')}{\sin(N'-1)\alpha'}, & (\mathrm{II}') \end{array}\right.$$

worin $\dfrac{\omega_0'^2}{\omega_0^2} = p^2$ gesetzt ist. Das eingeführte Verhältnis p^2 ist von vornherein bekannt und in unserem spezielleren Falle einfach gleich dem Verhältnis m/m'.

§ 4. Diskussion der Grundgleichungen (I') und (II').

Wir haben nun die Lösungen des transzendenten Gleichungssystems (I'), (II') zu suchen.

Wir nehmen $p^2 > 1$ an und sehen dann sofort, daß (I') nur für Werte von

$$\alpha' < \arccos\frac{p^2-2}{p^2}$$

reelle Werte für α liefert. Wir werden demgemäß unsere Diskussion in zwei Teile teilen, nämlich einen ersten Teil, der sich bezieht auf das Gebiet (1)

$$0 < \alpha' < \alpha_0'$$

und einen zweiten Teil, der sich mit dem Restgebiet (2)

$$\alpha_0' < \alpha < \pi$$

beschäftigt, wobei die Grenze α_0' mit Rücksicht auf das eben Gesagte zu

$$\alpha_0' = \arccos\frac{p^2-2}{p^2}$$

angenommen wird.

Das Verfahren, wodurch wir die gesuchten Lösungen bequem erhalten werden, ist ein graphisches.

Gebiet (1): $0 \leq \alpha' \leq \alpha_0'$.

Zeichnet man in einer α, α'-Ebene die beiden durch die Grundgleichungen (I') und (II') dargestellten Kurven, dann liefert jeder Schnittpunkt derselben je zwei zusammengehörige Werte von α und α' als Koordinaten des betreffenden Schnittpunktes. Die betreffenden zu den Gleichungen (I') und (II') gehörigen Kurven nennen wir (I_1') und (II_1'), wobei der untere Index darauf hinweisen soll, daß wir uns hier im Gebiete (1) halten, im übrigen soll das Wort Kurve auch die Bedeutung Kurvenschar haben können.

Zur Konstruktion der Kurven (I_1') zeichnen wir zwei Hilfsfiguren, eine erste Fig. 2 (*a*) enthält über einer α-Achse die Ordinaten $y = 1 - \cos\alpha$;

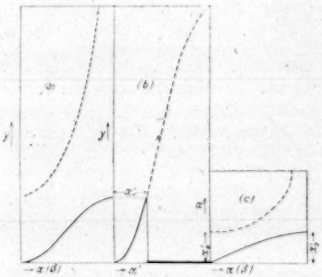


Fig. 2.

die zweite danebenstehende Fig. 2 (*b*) über einer α'-Achse die Ordinaten $y = p^2(1 - \cos\alpha')$. Parallele zur Abszissenachse schneiden diese beiden Kurven in Punkten, deren Abszissen die Gleichung (I_1') erfüllen. Mit Hilfe dieser Konstruktion ist es also ein leichtes, die Kurve (I_1'), dargestellt durch die Gleichung

$$1 - \cos\alpha = p^2(1 - \cos\alpha')$$

in einer α, α'-Ebene zu zeichnen. Dieses ist im dritten Stück (*c*) der Fig. 2 geschehen. Der Zeichnung ist der Wert $p^2 = 4$ zugrunde gelegt.

(I_1') ist symmetrisch zur Geraden $\alpha = \pi$ und periodisch mit der Periode $\alpha = 2\pi$. Den Fällen, in denen

$$\alpha' > \arccos\frac{p^2-2}{p^2}$$

$\left(\text{in unserer Figur } > \dfrac{\pi}{3} \text{ — stark ausgezogener Teil der } \alpha'\text{-Achse}\right)$ ist, entsprechen keine reellen Werte von α.

Mittels desselben Verfahrens konstruieren wir die Kurve (II_1'). Die Teilfiguren 3 (*a*) und 3 (*b*) bilden die Hilfsfiguren und zeigen die Kurven

$$y = \frac{\sin N\alpha}{\sin(N-1)\alpha}, \quad y = -\frac{\sin N'\alpha}{\sin(N'-1)\alpha'}$$

(unter der speziellen Annahme $N = 4$, $N' = 5$) für

$$0 < \alpha < \pi$$
$$0 < \alpha' < \pi.$$

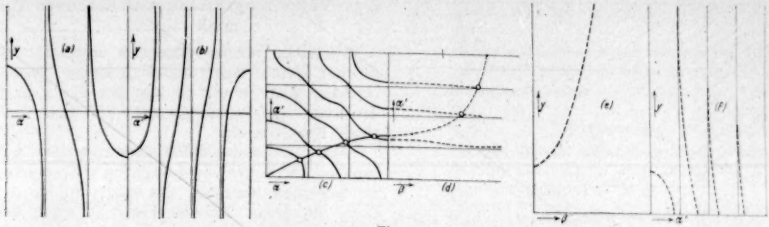


Fig. 3.

Beide Kurven sind symmetrisch zur Geraden $\alpha = \pi$ und periodisch mit der Periode $\alpha = 2\pi$. Daneben sehen wir Fig. 3 (*c*) in einer $\alpha\alpha'$-Ebene die Kurve (II_2'), welche mittels dieser Hilfsfiguren konstruiert wurde. Ihre Eigenschaften, sind auf Grund der Konstruktion, aus der sie gewonnen ist, ohne weiteres ersichtlich: Sie ist symmetrisch zu den Geraden $\alpha = \pi$, $\alpha' = \pi$ (weshalb es genügt, sie im Quadrat $[(0, 0)\ (\pi, 0)\ (\pi, \pi)\ (0, \pi)]$ zu zeichnen. Ihren Verlauf beschreiben wir am besten, indem wir das Quadrat durch Parallele zur Ordinatenachse im gegenseitigen Abstand $\frac{\pi}{N-1}$ und durch Parallele zur Abszissenachse im gegenseitigen Abstand $\frac{\pi}{N'-1}$ in $(N-1)\ (N'-1)$ gleiche Elementarrechtecke teilen. Die Kurve setzt sich dann aus einzelnen Stücken zusammen, die in jedem Elementarrechteck von einem Endpunkt zum anderen in der aus der Figur ersichtlichen Weise verlaufen. (Ausgenommen sind jene Eckpunkte, die in die Abszissen- bzw. die Ordinatenachse fallen. Dort landen die Kurven zwischen den Eckpunkten an der Abszissen- bzw. der Ordinatenachse.)

Für große Werte von N und N', wo wir uns auf die in der Einleitung auseinandergesetzte makroskopische Betrachtung beschränken dürfen, können wir die zwischen zwei Eckpunkten der Elementarrechtecke verlaufenden Kurvenstücke ohne weiteres durch die Diagonalen ersetzen, und erhalten so die in Fig. 4 gezeichnete Darstellung der „idealisierten" Kurve. Diese letztere wollen wir unseren folgenden Betrachtungen zugrunde legen.

Um nun die Wurzeln unseres Gleichungssystems zu erhalten, haben wir nichts zu tun, als die Kurve (II_1') durch die Kurve (I_1') zu schneiden. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind die gesuchten Werte von α und α'.

Aus Fig. 4 ist ersichtlich, daß die Zahl der Lösungen unterhalb eines gegebenen Wertes α $(= OB)$ sich ergibt zu

$$Z_\alpha = \frac{OB}{\frac{\pi}{N-1}} + \frac{BC}{\frac{\pi}{N'-1}} = (N-1)\frac{\alpha}{\pi} + (N'-1)\frac{\alpha'}{\pi}$$

Insbesondere ist:

$$Z_\pi = (N-1) + \frac{\alpha_0'}{\pi}(N-1).$$

Die Bedeutung dieses Resultats werden wir im folgenden Paragraphen diskutieren.

Gebiet (2): $\alpha_0' \leq \alpha' \leq \pi$.

Die Gleichung (I'):

$$(1 - \cos\alpha) = p^2(1 - \cos\alpha')$$

läßt sich für $\alpha' > \arccos\frac{p^2-2}{p^2}$ bekanntlich durch den komplexen Ansatz

$$\alpha = \pm i\beta + \pi$$

lösen. Führen wir nun mittels dieser Formel β an Stelle von α ein, dann verwandelt sich unser Gleichungssystem in das folgende:

$$1 + \mathfrak{Cof}\,\beta = p^2(1 - \cos\alpha'), \qquad (I_2')$$

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,N\beta}{\mathfrak{Sin}\,(N-1)\beta} = \frac{\sin N'\alpha'}{\sin(N'-1)\alpha'}. \qquad (II_2')$$

An Stelle unseres graphischen Verfahrens in der α, α'-Ebene tritt jetzt ein vollkommen analoges in einer β, α'-Ebene. Benutzen wir durchweg die früher zur Messung von α gebrauchte Achse nunmehr zur Messung von β, dann erhalten wir die gestrichelten Kurven der Fig. 2 (*a*) und (*b*) als Darstellung der Ordinaten

$$y = 1 + \mathfrak{Cof}\,\beta, \quad y = p^2(1 - \cos\alpha').$$

Durch Kombination entsteht die in Fig. 2 (*c*) gestrichelte Kurve als Darstellung von (I_2') in der β, α'-Ebene.

Die zur Konstruktion von (II_2') nötigen beiden Hilfskurven

$$y = \frac{\mathfrak{Sin}\,N\beta}{\mathfrak{Sin}\,(N-1)\beta}, \qquad y = \frac{\sin N'\alpha'}{\sin(N-1)\alpha'}$$

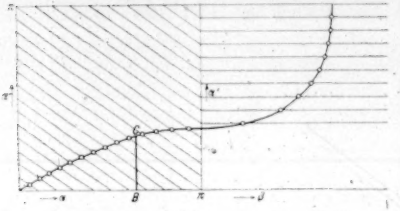


Fig. 4.

sind eigentlich nicht beide neu zu entwerfen, denn Fig. 3 (*b*) enthält ja schon die Ordinaten

$$y = -\frac{\sin N'\alpha'}{\sin (N'-1)\,\alpha'}$$

Der besseren Übersicht halber sind jedoch die zwei Hilfskurven in den Fig. 3 (*e*) und (*f*) nebeneinander gestellt; sie sind gestrichelt, um ihre Zugehörigkeit zum Gebiet (2) $\alpha_0' < \alpha' \leq \pi$ zum Ausdruck zu bringen. Durch Kombination von Fig. 3 (*e*) und (*f*) entsteht die in Fig. 3 (*d*) gestrichelt eingezeichnete Kurvenschar (Π_2'). Wie früher ist es gestattet, für die makroskopische Beobachtung (Π_2') durch eine Schar von Parallelen zur β-Achse im gegenseitigen Abstande $\frac{\pi}{N'-1}$ zu approximieren. Tun wir das, dann erhalten wir die noch ausstehende Vervollständigung der Fig. 4 und können nun an dieser letzteren Figur alle uns interessierenden Resultate ablesen.

So sieht man z. B. daß der Schnitt von (I_2') und der Schar Π_2' $\frac{\pi - \alpha_0'}{N'-1}$ (nahezu) äquidistante Phasenpunkte auf der α'-Linie[1]) liefert.

Die Gesamtzahl aller Phasenpunkte ist also:

$$(N-1) + \frac{\alpha_0'}{\pi}(N'-1) + \frac{\pi - \alpha_0'}{\pi}(N'-1) - 1 = N + N' - 3.$$

(Wir mußten 1 subtrahieren, denn wir haben einen Phasenpunkt — siehe Anmerkung — doppelt gezählt.) Sie stimmt überein mit der Zahl der Freiheitsgrade unserer Kette, wie es sein muß[2]).

1) Wie aus der genaueren Zeichnung Fig. 2 (*e*) (*d*) ersichtlich, kann im ersten Streifen von (*d*) ein Schnittpunkt liegen oder nicht. Im letzteren Falle hat die Kurve $(1-\cos\alpha) = \rho^2(1-\cos\alpha')$ innerhalb des Rechteckes, in das α_0' fällt, noch einen Schnittpunkt, im ersteren nicht.

2) Im allgemeineren Falle $f \neq f'$ würden die Kurven unserer Figuren sich zwar ändern, die Asymptoten indessen behalten ihre Lage bei. Man überzeugt sich deshalb nachträglich leicht, daß die Sätze des folgenden Paragraphen auch im allgemeinen Falle ihre Gültigkeit beibehalten.

§ 5. Verteilungsdichte und Grenzen des Spektrums.

Verstehen wir im folgenden unter $d\alpha$ und $d\alpha'$ nur kleine, nicht unendlich kleine Phasenbereiche, dann lesen wir aus der Fig. 4 nach der oben auseinandergesetzten Methode folgende Resultate ab.

Ist $0 < \alpha < \pi$ und damit zugleich $0 < \alpha' < \alpha_0'$, dann ist die Anzahl Spektrallinien dZ, welcher wir begegnen, wenn wir von einem Punkte der Kurve im linken Teil der Figur zu einem benachbarten fortschreiten in der Grenze für große Werte von N und N':

$$dZ = \underbrace{\frac{d\alpha}{\pi}}_{(N-1)} + \underbrace{\frac{d\alpha'}{\pi}}_{(N'-1)} = N\frac{d\alpha}{\pi} + N'\frac{d\alpha'}{\pi}.$$

Ist dagegen $\alpha_0' < \alpha' < \pi$ und damit α komplex, dann finden wir für dZ den Wert

$$dZ = \underbrace{\frac{d\alpha'}{\pi}}_{(N'-1)} = N'\frac{d\alpha'}{\pi}.$$

Statt dessen können wir das Resultat auch folgendermaßen zusammenfassen:

Das Gesamtspektrum besteht aus einer Überlagerung zweier Spektren, von denen das erste pro Phasenbereich $d\alpha$

$$dZ = N\frac{d\alpha}{\pi} \qquad (3)$$

Spektrallinien, und das zweite

$$dZ' = N'\frac{d\alpha'}{\pi} \qquad (4)$$

Spektrallinien enthält. Beide Spektren werden in ihrer ganzen Ausdehnung erhalten, wenn man sowohl α wie auch α' zwischen 0 und π variieren läßt.

Da nun nach unseren früheren Formeln (1) und (2) die Schwingungszahlen ω zu α bzw. α' in genau derselben Beziehung stehen, wie das bei den Einzelketten der Fall sein würde, folgt also sofort der in der Einleitung genannte Satz auch für das hier betrachtete gekoppelte, molekulare System.

Man kann natürlich in (3) und (4) auch die Schwingungszahl ω einführen. Setzt man dazu

$$\omega_0^2 = \frac{4f}{m}, \qquad \omega_0'^2 = \frac{4f'}{m'},$$

dann sind ω_0 und ω_0' die Grenzschwingungszahlen der Einzelketten. Durch Differentiation von (1) und (2) findet man dann statt (3) und (4)

$$dZ = \frac{2N}{\pi}\frac{d\omega/\omega_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \qquad (3')$$

$$dZ' = \frac{2N'}{\pi} \frac{d\omega/\omega_0'}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0'}\right)^2}} \qquad (4')$$

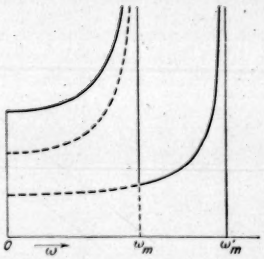


Fig. 5.

Zeichnet man die Dichteverteilung senkrecht zu einer ω-Achse, dann erhält man die Fig. 5, welche das durch seine Übereinanderlagerung der Einzelspektren (gestrichelte Kurven) entstandene Auftreten zweier Häufungspunkte (Grenzen) des gekoppelten Systems deutlich erkennen läßt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß man das Ausbleiben einer gegenseitigen Beeinflussung auch der Grenzen versteht, wenn man diese Erscheinung in Zusammenhang mit der Tatsache bringt, daß eine Kette Schwingungen mit größerer Frequenz als die Grenzfrequenz nicht mehr in Form von Wellen zu übertragen vermag, sondern darauf nur mit einer örtlich längs der Seite exponentiell abfallenden Bewegung reagiert.

Zusammenfassung.

1. M. Born beweist für kontinuierliche Systeme den Satz, daß das akustische Spektrum eines Doppelsystems in makroskopischem Sinne entstanden gedacht werden kann durch Übereinanderlagerung der Spektren der Einzelsysteme.
2. Wir schlagen vor, diesen Satz auch als richtig anzusehen für molekular gebaute Systeme, welche nur durch Oberflächenbedingungen miteinander gekoppelt sind.
3. Diesen Vorschlag begründen wir durch die wirkliche Ausrechnung der Spektralverteilung für zwei gekoppelte Ketten von quasielastisch gebundenen Massenpunkten. Das Resultat ist mit 2 in Einklang.
4. Die Einführung einer einzigen Grenzschwingungszahl auch bei zwei gekoppelten Systemen ist in Widerspruch mit 2. Gerade durch dieses von Born befolgte Verfahren entsteht der dortselbst gerügte Widerspruch.
5. Stützt man sich dagegen auf 2, dann werden die thermodynamischen Funktionen linear in den Massen der Bestandteile, und ist also hier kein Anlaß vorhanden, eine besondere Störung der Wellen anzunehmen beim Durchgang durch eine Trennungsschicht. Die Methode der Eigenschwingungen ist also auch bei gekoppelten Systemen ohne Zusatz anwendbar.

Utrecht-Leiden, 20. März 1914.

(Eingegangen 21. März 1914.)

Zur Theorie des Debyeeffekts.

Von Erwin Schrödinger.

Neulich habe ich in dieser Zeitschrift ein Problem behandelt[1]), welches mir geeignet schien, Aufschluß zu erhalten über die feineren Details des Debyeeffekts (Temperatureinfluß bei Kristallröntgenogrammen), nämlich über die Intensitätsverteilung in den einzelnen Maximis, während die Rechnungen des Herrn Debye nach meiner Ansicht nur die gröberen Züge der Erscheinung, nämlich die Intensitätsverteilung unter den verschiedenen Maximis, enthüllt haben[2]).

Auf einer Geraden dachte ich mir $2N+1$ elastisch gekoppelte Massenpunkte (Atome). Senkrecht zu der Geraden ließ ich eine ebene Welle einfallen, welche je einen Resonator im „Innern" jedes Massenpunktes zu Sekundärstrahlung anregen sollte. Es galt die mittlere Intensitätsverteilung (Zeitmittel!) in der durch die Punktreihe und die Richtung der einfallenden Strahlung gelegten Ebene zu berechnen für Punkte, deren Entfernung von der Atomreihe groß ist gegen deren Länge. Für die mittlere Intensität der Sekundärstrahlung erhielt ich den Ausdruck (l. c., Gl. (22))

$$I_m = \sum_{-N}^{+N} \sum_{-N}^{+N} e^{i\varkappa a(n-m)\cos\vartheta - \frac{kT}{2f}\varkappa^2\cos^2\vartheta \sum_{-N}^{+N} l \frac{(a_{n\,l}-a_{m\,l})^2}{t_l}}, \qquad (1)$$

Hierin bedeutet

$\frac{2\pi}{\varkappa}$ die Wellenlänge der Sekundärstrahlung,

a den „kraftfreien" Atomabstand

1) „Über die Schärfe der mit Röntgenstrahlen erzeugten Interferenzbilder", diese Zeitschr. **15**, 79, 1914.

2) P. Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 678, 738, 857, 1913; Ann. d. Phys. **43**, 49, 1914. Selbstverständlich sollen die Worte „grob" und „fein" nur die rein geometrischen Verhältnisse bezeichnen. Interessanter ist vielleicht die Verteilung unter den Maximis wegen der Beziehung zur Nullpunktsenergie (siehe die zuletzt zitierte Arbeit).

ϑ den Winkel zwischen der Atomreihe und der Beobachtungsrichtung,
k die Boltzmannsche Entropiekonstante,
T die absolute Temperatur,
f den Parameter der quasielastischen Kraft zwischen Nachbaratomen.

Die a_{nl} sind die normierten Eigenfunktionen bei der Darstellung der Verschiebungen ξ_n der Massenpunkte durch die Normalkoordinaten a_l:

$$\xi_n = \sum_{-N}^{+N}{}_l a_{nl} a_l . \qquad (2)$$

Die p_l sind, von einem konstanten Faktor abgesehen, die Quadrate der Eigenfrequenzen der betreffenden Normalkoordinaten.

Der Rechenvorgang bei der Auswertung des Ausdrucks (1) wird nun, wie ich erwähnte, wesentlich beeinflußt durch die Annahme, welche man über die beiden Randatome macht, ob man dieselben z. B. als fix, als frei, als elastisch an ihre Ruhelage gebunden ansieht oder dgl. Die Eigenfunktionen a_{nl} hängen nämlich von diesen Randbedingungen ab. Die physikalische Aussage des Endresultats für I_m bleibt aber davon unberührt, wenn die Zahl der Atome nur genügend groß ist, und I_m läßt sich durch eine einfache Approximationsmethode, welche die Randbedingungen nicht berücksichtigt, mit der wünschenswerten Genauigkeit finden.

Diese Tatsache ist seither in Zweifel gezogen worden[1]). Da hierdurch die Eindeutigkeit des Resultats und damit die physikalische Brauchbarkeit des Modells überhaupt in Frage gestellt ist, erscheint es nötig, den strengen Beweis für die Unabhängigkeit des Endresultats von den Randbedingungen nunmehr in extenso zu erbringen. Dies geschieht in § 1. § 2 enthält einige Bemerkungen, die sich an die Rechnungen von § 1 knüpfen und mir von Interesse zu sein scheinen. In § 3 wird die physikalische Bedeutung meiner Endformel ausführlicher erörtert.

§ 1.

Gitterlinie mit beliebigen Randbedingungen.

Wir vermeiden jetzt den Grenzübergang $N = \infty$, welcher zu den oben erwähnten Bedenken Anlaß gegeben hat. Wir werden zeigen, daß man aus (1) schon bei genügend großem endlichen N unabhängig von den Randbedingungen für I_m wesentlich dasselbe Resultat erhält, das ich neulich angegeben habe (Gl. (32), l. c.).

Für die einfachen Summen im Exponenten von (1) findet man bei endlichem N, wenn die Randpunkte frei sind

$$\sum_{-N}^{+N}{}_l \frac{(a_{nl} - a_{ml})^2}{p_l} = n - m . \qquad (3)^1)$$

Bei festen Randpunkten findet man

$$\sum_{-N}^{+N}{}_l \frac{(a_{nl} - a_{ml})^2}{p_l} = |n-m| - \frac{(n-m)^2}{2N} . \qquad (4)^1)$$

Der Wert (3) ist derselbe, den mein Approximationsverfahren lieferte. Die Rechnungen meiner ersten Arbeit, z. B. die Formel (30) l. c., gelten also in aller Strenge bei beliebigem N für freie Randpunkte.

Es gilt nun zu zeigen, daß man auch mit (4) bei genügend großem, endlichen N wesentlich das gleiche Resultat für die Doppelsumme (1) erhält wie mit (3), was deshalb besonders bemerkenswert ist, weil sogar die Mehrzahl der Ausdrücke (4) sich merklich von den entsprechenden Ausdrücken (3) unterscheidet. Infolge der besonderen Natur der Doppelsumme kommen aber (bei genügend großem N) in ihr nur jene Glieder in Betracht, für welche kein merklicher Unterschied zwischen (3) und (4) besteht.

Um dies zu zeigen, führen wir in (1) die Abkürzungen ein

$$\alpha = \varkappa a \cos\vartheta , \quad \varepsilon = \frac{kT}{f} \varkappa^2 \frac{\cos^2\vartheta}{2} . \qquad (5)$$

Wir erhalten dann aus (1) mit (4)

$$I_m = \sum_{-N}^{+N}{}_m \sum_{-N}^{+N}{}_n e^{i\alpha(n-m) - \varepsilon|n-m| + \varepsilon\frac{(n-m)^2}{2N}} . \qquad (6)$$

Zunächst kann man hier alle Glieder mit gleichem $n-m$ zusammenfassen und erhält die einfache Summe

$$I_m = \sum_{-2N}^{+2N}{}_k (2N+1-|k|)\, e^{i\alpha k - \varepsilon|k| + \varepsilon\frac{k^2}{2N}} =$$

$$= 2\sum_{0}^{+2N}{}_k (2N+1-k)\cos\alpha k \cdot e^{-\varepsilon k\left(1-\frac{k}{2N}\right)} - (2N+1) . \qquad (7)$$

Nun sei P eine ganze Zahl kleiner als N, über welche wir noch verfügen werden. Wir zerlegen die Summation in folgende Teilstrecken

$$\sum_{0}^{P-1}, \quad \sum_{P}^{2N-P}, \quad \sum_{2N-P+1}^{2N} .$$

1) „Zum Problem des Interferenzbildes einer Gitterlinie", von Johann Kern, diese Zeitschr. 15, 337, 1914.

1) J. Kern, l. c., S. 341. Wir bezeichnen hier wieder die Anzahl der Punkte mit $2N+1$, während Herr Kern N dafür schreibt. Die Ungeradheit ist aber natürlich nicht wesentlich!

Wir werden nun sukzessive die Fehler abschätzen, die wir begehen, wenn wir 1. die beiden letzten Summen unterdrücken, 2. in der ersten Summe das quadratische Glied im Exponenten fortlassen, 3. den Faktor $2N+1-k$ durch $2N+1$ ersetzen, 4. die Summe nunmehr statt bis $P-1$ bis ∞ erstrecken. Die Summe, die übrig bleibt, läßt sich dann leicht ausführen. Dann wird sich zeigen, daß man, wenn N genügend groß ist, P immer so wählen kann, daß die begangenen Fehler von kleinerer Größenordnung sind als das Resultat.

Schätzen wir nun die einzelnen Fehler nach ihrem Absolutbetrag. In der zweiten Teilsumme ersetzen wir alle Kosinusse durch $+1$, die beiden anderen Faktoren durch die größten Werte, die sie auf dieser Strecke annehmen; die Zahl der Summanden ist $2N-2P+1$. So erhalten wir

$$\left|2\sum_{P}^{2N-P}\right| < 2(2N-2P+1)(2N-P+1)e^{-\varepsilon P\left(1-\frac{P}{2N}\right)}. \tag{I}$$

Ähnlich gibt die dritte Teilsumme

$$\left|2\sum_{2N-P+1}^{2N}\right| < 2P^2. \tag{II}$$

Demnach wird (vorbehaltlich der Fehlerschätzung)

$$I_m = 2\sum_{1}^{P-1} k\cos\alpha k\cdot e^{-\varepsilon k+\frac{\varepsilon k^2}{2N}}(2N+1-k) - \\ -(2N+1).$$

Lassen wir nun in dieser Summe die Faktoren $e^{\frac{\varepsilon k^2}{2N}}$ weg, so begehen wir einen Fehler, der ersichtlich kleiner ist als

$$\text{3. Fehler} < 2(2N+1)\left(e^{\frac{\varepsilon P^2}{2N}}-1\right)\sum_{0}^{P-1} k e^{-\varepsilon k} \\ < 2(2N+1)\left(e^{\frac{\varepsilon P^2}{2N}}-1\right)\frac{1-e^{-\varepsilon P}}{1-e^{-\varepsilon}}. \tag{III}$$

Wenn wir dann noch den Faktor $2N+1-k$ durch $2N+1$ ersetzen, ist der Fehler kleiner als

$$\text{4. Fehler} < 2\sum_{1}^{P-1} k = P(P-1). \tag{IV}$$

Es bleibt dann

$$I_m = (2N+1)\left(2\sum_{0}^{P-1} k\cos\alpha k\cdot e^{-\varepsilon k}-1\right).$$

Endlich erstrecken wir die Summe statt bis $P-1$ bis ∞ und begehen damit einen fünften Fehler, der kleiner bleibt als

$$\left.\begin{aligned}\text{5. Fehler} &< 2(2N+1)\sum_{P}^{\infty} k e^{-\varepsilon k} \\ &< 2(2N+1)\frac{e^{-\varepsilon P}}{1-e^{-\varepsilon}}.\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Vorbehaltlich der Abschätzung der Fehler (I) bis (V) gilt also

$$I_m = (2N+1)\left(2\sum_{0}^{\infty} k\cos\alpha k\cdot e^{-\varepsilon k}-1\right).$$

Die Summe läßt sich leicht ausführen, indem man die Kosinusse wieder zerlegt, und man findet nach einigen Reduktionen

$$I_m = \frac{\frac{1}{2}(e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon})(2N+1)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}}-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{8}$$

was genau mit dem Ausdruck (32) auf S. 84 meiner ersten Abhandlung übereinstimmt, aus dem ich alle meine Resultate abgeleitet habe.

Es erübrigt nur noch die Abschätzung der Fehler (I) bis (V) im Verhältnis zu dem Wert (8) von I_m. Nun ist nach (8) immer

$$I_m > \frac{e^{\varepsilon}-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{e^{\varepsilon}+e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}(2N+1).$$

Setzt man also für ε eine, übrigens beliebig kleine, untere Schranke δ fest, so ist

$$I_m \geq g(2N+1), \tag{9}$$

wo g ein fester Wert, nämlich $= \frac{e^{\delta}-e^{-\frac{\delta}{2}}}{e^{\delta}+e^{-\frac{\delta}{2}}}$ (die hyperbolische Tangente wächst immer mit dem Argument). Man braucht nun in den Ausdrücken (I) bis (V) nur etwa $P=\sqrt[3]{2N+1}$ (oder der nächstbenachbarten ganzen Zahl) zu setzen, so erkennt man, daß für $\varepsilon \geq \delta$ alle diese Ausdrücke gegen (9) zu vernachlässigen sind, wenn N nur genügend groß ist; die Formel (8) gilt dann also mit beliebiger Annäherung zunächst für solche ε.

Das genügt aber, um bei hinreichend großem N die Formel (8) für beliebiges ε anwenden zu dürfen. Man kann nämlich die Schranke δ von vornherein so klein wählen, daß (8) für $\varepsilon \leq \delta$ ein beliebig wenig gestörtes Beugungsbild liefert. Denn je kleiner ε, desto rascher erfolgt nach (8) der seitliche Abfall von den ungestörten Maximis aus ($\alpha = 2\pi \times$ ganze Zahl). Dann wird aber für $\varepsilon \leq \delta$ auch die Doppelsumme (6) ein merklich scharfes Beugungs-

bild liefern, und zwar a) für $\varepsilon = \delta$, weil hier die Näherung (8) noch gilt, b) für $\varepsilon < \delta$ nach ihrem Bau a fortiori. Somit dürfen wir die Näherung (8) für alle ε verwenden, wenn N nur hinreichend groß ist.

Damit ist also bewiesen, daß man bei hinreichend großem N auch bei festgehaltenen Randpunkten dieselbe Beugungsfigur erhält wie bei freien[1]).

Man könnte natürlich außer den beiden Randbedingungen, für welche wir die Frage hiermit erledigt haben, auch noch viele andere betrachten. Nicht nur könnte man einen oder beide Randpunkte durch beliebige Kräfte an ihre Ruhelagen fesseln; am naheliegendsten wäre es vielleicht, sie von Gasmolekülen bombardieren zu lassen, mit denen sie im Wärmegleichgewicht stehen. Es ist nicht daran zu denken, die Rechnung für alle erdenklichen Arten solcher Randbedingungen durchzuführen. Aber ich denke die Erledigung der beiden extremen Fälle: Randpunkte frei und Randpunkte fest, wird hinreichen, um zu zeigen, daß die Lösung im allgemeinen vollkommen bestimmt ist, und daß daher der am Ende der Arbeit des Herrn Kern gegen die Problemstellung erhobene Vorwurf dieselbe nicht trifft[2]).

§ 2.

Die Laue-Tankschen „einheitlich schwingenden" Bezirke.

Nicht ohne Interesse ist der mathematische Grund, warum das quadratische Glied in (4) die Doppelsumme (1) bei genügend großem N nicht mehr beeinflußt, obwohl es, wie bemerkt, bei beliebig großem N die Mehrzahl der Summen (4) gegen (3) wesentlich herabdrückt. An der Hand der vorstehenden Entwicklungen erkennt man: das rührt davon her, daß in der Doppelsumme nicht alle Werte der Differenz $m - n$ gleich oft auftreten, sondern die großen, mit N vergleichbaren, bei denen das quadratische Glied etwas austrägt, selten gegenüber den kleinen, bei denen das quadratische Glied nichts austrägt. Der Umstand, daß die kleineren Differenzen für das Resultat allein maßgebend sind, berührt physikalisch außerordentlich sympathisch. Denn das kommt darauf hinaus, daß der Gesamtbeitrag aller jener Atompaare, welche eine bestimmte Distanz voneinander haben, um so mehr zu vernachlässigen ist, je größer diese Distanz, daß also die Interferenzerscheinung wesentlich durch das Zusammenwirken verhältnismäßig nahe benachbarter Atome zustande kommt[1]). Dieses ungemein plausible Ergebnis fließt hier „automatisch" aus den Grundlagen der Born- und v. Kármánschen Theorie, ohne daß es nötig wäre, eine Modifikation derselben, etwa irgendwelche Annahmen über die Dämpfung oder Zerstreuung elastischer Wellen im Kristall einzuführen[2]).

Lassen wir die Überlegungen der Anmerkung 1) gelten, so daß wir von dem sonderbaren Verhalten des Debyeschen Schwächungsfaktors bei festen Randpunkten absehen können, so werden auch die Einzelbeiträge der Atompaare mit wachsender Distanz immer kleiner, ihre Strahlungen „interferieren immer schlechter" und es wird sich eine gewisse (mit zunehmender Temperatur abnehmende) Distanz angeben lassen, bei welcher die Interferenzfähigkeit praktisch aufgehört hat. Dies stimmt nun in bemerkenswerter Weise mit den Vorstellungen überein, welche man sich vor der Entwicklung der Debyeschen Theorie von dem Einfluß der Wärmebewegung auf das Zustandekommen der Interferenzerscheinung gemacht hatte. Planck[3]), dann v. Laue und Tank[4]) sprachen die Ver-

1) Es ist besonders zu betonen, daß nach den Grundlagen unserer Rechnung immer alle $2N+1$ Atome als bestrahlt und strahlend angesehen werden, nicht etwa nur ein kleines mittleres Stück einer sehr ausgedehnten Atomreihe; in dem letzteren Fall wäre das eben abgeleitete Resultat ziemlich selbstverständlich.

2) Befremden muß die Ansicht des Herrn Kern, daß an der von ihm vermuteten Unbestimmtheit der Umstand schuld sei, daß der Einfachheit halber zunächst das eindimensionale Problem behandelt wurde. Ich hätte es für einleuchtend gehalten, daß genau dieselben Verhältnisse, welche hier eine Unbestimmtheit der Lösung vortäuschen konnten, auch beim dreidimensionalen Problem auftreten müssen, nur in entsprechend verwickelterer Form.

1) Der Beitrag eines einzelnen Atompaares nimmt, wenn man mit (4) statt mit (3) rechnet, nicht beständig ab mit zunehmender Entfernung. Der Debyesche Schwächungsfaktor $\left(\text{in diesem Falle } e^{-\varepsilon^2 n - m + \varepsilon \frac{(n-m)^2}{2N}}\right)$ wächst wieder, wenn die Entfernung die halbe Länge der Atomreihe überschreitet, und wird für $n - m = 2N$, d. i. für das äußerste (ruhende) Punktepaar wieder $= 1$ (man vergleiche die Figur bei Kern, l. c.). Dieses physikalisch unsinnige Resultat, daß weiter entfernte Punkte wieder „besser interferieren", rührt davon her, daß die Bedingung „Randpunkte fest" wesentlich unrealisierbar ist. Denn irgendein Mechanismus, welcher die unveränderliche Distanz dieser beiden Punkte garantieren sollte, müßte ja doch selbst wieder aus Molekülen bestehen, denen sich die Wärmebewegung der Punktreihe mitteilen würde; er würde daher Längenschwankungen von derselben Größenordnung wie die freie Punktreihe erleiden.

Ich habe nur deshalb mit dem Resultat (4) weitergerechnet, weil ich die Eindeutigkeit des Endresultats auch für den Fall sicherstellen wollte, daß man die eben gemachte Bemerkung nicht für stichhaltig gelten läßt.

2) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. **43**, 65, 1914; J. Kern, l. c., S. 339, Anm.

3) Bei einer Diskussion in der Deutschen Phys. Ges.

4) M. v. Laue und F. Tank, Ann. d. Phys. **41**, 1010, 1913.

mutung aus, „daß vielleicht erhebliche Teile des Raumgitters nach Amplitude und Phase fast die gleichen Schwingungen haben und sich so relativ zueinander nicht oder nur unbeträchtlich verschieben; es würde dann zwar nicht der ganze Kristall, so weit er bestrahlt ist, als ein einheitliches Raumgitter wirken, wohl aber wäre dies bei jedem derartigen Teil der Fall".

Ich glaube, daß diesen Vermutungen eine intuitive Erkenntnis des wahren Sachverhaltes zugrunde lag. Tatsächlich kann man ja in den angeführten Worten eine rohe Beschreibung (mehr konnte nicht beabsichtigt sein) des Vorgangs erblicken, wie er sich nach unserer Analyse darstellt.

v. Laue und Tank vermuteten auch, daß die Größe jener „einheitlich schwingenden" Bezirke mit zunehmender Temperatur abnehmen muß. Sie erschlossen daraus einen Einfluß der Temperatur auf die Länglichkeit der Flecken, welche von der Krümmung der einfallenden Welle herrührt; die letztere ist nämlich um so eher zu vernachlässigen, je kleiner die Bezirke sind, die als einheitliche Raumgitter wirken. Es ist klar, daß ein derartiger Temperatureinfluß sich auch nach der hier dargelegten Theorie ergeben muß, und daß er dem Experiment zugänglich sein könnte. Leider ist es mir bisher noch nicht gelungen, im dreidimensionalen Fall die Rechnung auch nur für eine ebene Primärwelle bis zu Ende zu führen.

Nach der ersten exakten Berechnung des Temperatureinflusses durch Debye ergab sich dann allerdings die scheinbare Unrichtigkeit der Planck-Laue-Tankschen Vermutungen. Die Durchrechnung[1]) unter Rücksicht auf die Wärmebewegung nach Debyes Vorgang ergab Unabhängigkeit der Fleckenform von der Temperatur auch bei Krümmung der Primärwelle. Dafür, daß die Länglichkeit bei wachsender Entfernung Antikathode—Kristall weit eher verschwindet als verständlich ist, wenn man den ganzen bestrahlten Teil des Kristalls als einheitliches Raumgitter auffaßt, machen die Herren v. Laue und Tank in ihrer zweiten Arbeit ausschließlich strukturelle „Fehler" des Kristalls verantwortlich (l. c., S. 1566). Nach unserer Theorie könnte, wie gesagt, auch die erste Auffassung v. Laues die richtige sein. Die Debyesche Theorie scheint mir wegen gewisser Vernachlässigungen, die ihr derzeit noch anhaften, nicht imstande, so feine Details des Interferenzbildes richtig wiederzugeben[2]).

Die Tatsache, daß nur Atompaare, welche nicht allzu weit voneinander entfernt sind, eine merkliche Interferenzintensität liefern, läßt auch das einem natürlichen Instinkt entspringende Bedenken verschwinden, man könnte durch die Methode der Normalschwingungen, wonach die sin- und cos-Wellen, in welche man sich die Wärmebewegung zerlegt denkt, im ganzen Gitter als kohärent angesehen werden, dem physikalischen Problem Gewalt angetan haben. Diesem Bedenken entstammen, wie ich glaube, die Debyeschen Überlegungen über die „Reichweite" elastischer Wellen im Kristall. Nach meiner Ansicht ist man (abgesehen von etwaigen „strukturellen Fehlern", von denen man natürlich von vornherein nicht wissen kann, wie stark sie die beobachteten Erscheinungen beeinflussen) vollkommen berechtigt, ja verpflichtet, die wirkliche Kohärenz in dem ganzen betrachteten Gebiet anzunehmen[1]). Daß die Bewegungen entfernterer Atome in keiner merklichen Abhängigkeit mehr stehen, ergibt sich dann „automatisch", wie sich daran erkennen läßt, daß ihre Strahlungen nicht mehr merklich interferieren. Der Fall liegt ähnlich, wie beispielsweise in der Planckschen Strahlungstheorie, wenn man den Lichtvektor in einem Punkt einer (physikalisch!) monochromatischen Welle für einen beliebig langen Zeitraum, etwa für ein ganzes Jahr, in eine Fourierreihe entwickelt. Die Partialschwingungen dieser Fourierreihe erfolgen wirklich während eines ganzen Jahres streng kohärent, und das steht keineswegs in Widerspruch mit der Tatsache, daß die Interferenzfähigkeit desselben Lichtstrahls „mit sich selbst" (wenn man ihn etwa durch partielle Reflexion in zwei „identische" spaltet) schon nach einer Wegdifferenz der Komponenten von wenigen Dezimetern aufhört. Im Gegenteil ergibt sich dieses Resultat auch hier durch eine statistische Überlegung „von selbst", wenn man eine den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende Annahme über den Grad der Monochromasie des Lichtstrahls macht, d. h. über die Zahl der Fourierglieder, welche zu seiner Darstellung notwendig sind.

1) M. v. Laue und F. Tank, Ann. d. Phys. **42**, 1561, 1913.

2) Debye hebt (l. c., S. 65) ausdrücklich hervor, daß der dort vorgenommenen Mittelbildung über die Phase δ die Voraussetzung zugrunde liegt, daß schon die Schwingungen von Nachbaratomen voneinander ganz unabhängig sind. Er erhält dadurch für alle Atompaare denselben Schwächungsfaktor. Dies ist der mathematische Grund für die Schärfe der Bilder überhaupt und speziell auch für das Fehlen eines Einflusses der Wärmebewegung auf die „Länglichkeit".

1) Natürlich nicht mehr, wenn man Abweichungen vom Hookeschen Gesetz annimmt. Inwieweit andere Erscheinungsgebiete hierzu nötigen, soll hier nicht diskutiert werden [siehe P. Debye, Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, S. 19 ff., Teubner 1914]. Für die Theorie des Debyeeffekts scheint mir das überflüssig, zumal ~~es~~ ihre Durchführung einer exakten Theorie so gut wie unmöglich macht.

§ 3.

Die physikalische Deutung der Formel (8).

Schließlich möchte ich noch einige Worte über die Deutung der Formel (8) hinzufügen, da mir eine Bemerkung in der oben zitierten Arbeit des Herrn Kern gezeigt hat, daß die Form, in der ich die daraus folgenden Schlüsse in meiner ersten Arbeit ausgesprochen habe, zu Mißverständnissen Anlaß geben kann.

Zunächst wiederhole ich, daß eine quantitative Übereinstimmung mit der Erfahrung von dem eindimensionalen Modell nicht erwartet werden darf, wohl aber eine qualitative.

Sei $\alpha_0 = 2n\pi$ der Wert von α in einem Maximum der ungestörten Interferenzfigur, und $\alpha' = \alpha - \alpha_0$. Wir beschränken uns auf kleine Werte von ε und α'. Wir werden sehen, daß wir jedenfalls für die Darstellung der bisher beobachteten Fälle damit unser Auslangen finden. Es wird sich nämlich zeigen, daß die Flecken unter gewissen Umständen wegen Lichtschwäche verschwinden, noch bevor eine starke Verbreiterung, das vollständige Verschwimmen, eingetreten ist. — Für kleine ε und α' nimmt (8) näherungsweise die Gestalt an

$$I_m = \frac{2(2N+1)}{\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)^2}. \qquad (10)$$

Das Differential des Beugungswinkels ϑ ist nach (5)

$$d\vartheta = \pm \frac{d\alpha'}{\varkappa a \sin\vartheta} \qquad (11)$$

$\left(\frac{2\pi}{\varkappa}\right.$ Wellenlänge, a Gitterabstand$\left.\right)$. Die zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ auftreffende Energie ist also proportional mit

$$I_m d\vartheta = \frac{2(2N+1)}{\varkappa a \sin\vartheta} \frac{\frac{d\alpha'}{\varepsilon}}{1+\left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)^2}, \qquad (12)$$

Zur Berechnung der Gesamtintensität eines Flecks habe ich nun nach α' von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert und finde sie unabhängig von der Temperatur; das ist (unter gewissen Vernachlässigungen) richtig, wenn man eben die gesamte der Umgebung eines Flecks zugestrahlte Energiemenge finden will. Aber man darf daraus nicht den Schluß ziehen, daß die photographisch gemessene Intensität des Flecks von der Temperatur unabhängig sein muß.

Um eine erkennbare Schwärzung auf der photographischen Platte hervorzubringen, ist bei bestimmter Belichtungsdauer eine gewisse Minimalintensität notwendig, welche von der Belichtungsdauer und von der Stärke des allgemeinen „Schleiers" abhängt, der in größerem oder geringerem Maße stets vorhanden ist. Sei diese Minimalintensität I_0, dann wird zunächst die bemerkbare Ausdehnung eines Flecks durch die Größe $2\alpha_0'$ gemessen, wo

$$I_0 = \frac{2(2N+1)}{\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_0'}{\varepsilon}\right)^2}, \qquad (12)$$

also

$$2\alpha_0' = 2\varepsilon \sqrt{\frac{2(2N+1)}{\varepsilon I_0} - 1}. \qquad (13)$$

Nennen wir $I_{\max}$ den Wert von I_m für $\alpha' = 0$, also

$$I_{\max} = \frac{2(2N+1)}{\varepsilon}, \qquad (14)$$

so können wir auch schreiben

$$2\alpha_0' = 2\varepsilon \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_0} - 1}. \qquad (15)$$

Da ε mit der absoluten Temperatur proportional ist [Gl. (5)], so ergibt sich aus (13): Die photographische Breite des Beugungsbildes muß bei konstanter Exposition mit wachsender Temperatur erst zu- und dann wieder abnehmen, bis sie bei einer bestimmten (von der Expositionsdauer abhängigen!) Temperatur verschwindet, und zwar nach (15) natürlich dort, wo $I_{\max} = I_0$ geworden ist. Die maximale Breite des Flecks tritt auf, wenn $\varepsilon = \frac{2N+1}{I_0}$, also $I_{\max} = 2I_0$ ist. Sie beträgt 2ε. Bei dem doppelten Wert der Temperatur verschwindet dann das Bild. Wenn die betreffenden ε noch klein sind gegen 1 (für diesen Fall allein gelten diese einfachen Rechnungen), wird also das vollständige Verschwimmen des Flecks sich überhaupt der Beobachtung entziehen.

Die mittlere photographische Intensität hängt natürlich noch ab von dem Schwärzungsgesetz. Wäre die Schwärzung der Intensität I_m proportional, so könnten wir sie (für bestimmte Expositionsdauer) durch den Mittelwert von I_m messen. Wir erhalten aus (11) und (12)

$$I_m = \frac{2(2N+1)}{\varkappa a \sin\vartheta} \frac{\int_{-\alpha_0'}^{+\alpha_0'} \frac{d\alpha'}{\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)^2}}{\int_{-\alpha_0'}^{+\alpha_0'} \frac{d\alpha'}{\varkappa a \sin\vartheta}} = \frac{2(2N+1)}{\alpha_0'} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0'}{\varepsilon}, \qquad (16)$$

da ϑ in dem kleinen Bereich als konstant gelten kann. Um die Art der Abhängigkeit von der Temperatur zu erkennen, ist es am bequemsten,

$$\frac{a_0'}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{I_{max}}{I_0} - 1} = y \qquad (17)$$

als Variable einzuführen. Diese Größe nimmt nach (14) und (5) mit wachsender Temperatur beständig ab von positiven Werten bis zur 0. Man erhält nun leicht

$$\overline{I_m} = I_0 \frac{(1+y^2)\operatorname{arctg} y}{y}, \qquad (18)$$

und dieser Ausdruck ändert sich für positives Argument beständig im gleichen Sinn wie y[1])

Auch nach unserer Theorie muß also bei konstanter Expositionszeit die mittlere photographische Intensität eines Flecks mit wachsender Temperatur beständig abnehmen, wenn man nur berücksichtigt, daß die Strahlungsintensität einen gewissen Schwellenwert überschreiten muß, damit überhaupt eine Schwärzung bemerkbar ist, und wenn man oberhalb dieses Schwellenwertes annimmt, daß die Schwärzung der auftreffenden Energie proportional ist. Man darf wohl annehmen, daß auch das richtige Schwärzungsgesetz, welches, soviel ich weiß, für diese Aufnahmen noch nicht bekannt ist, an dem Resultat qualitativ nichts ändern wird.

Es ist nicht zu erwarten, daß man die hier skizzierten Erscheinungen in der Erfahrung reinlich bestätigt finden wird. Insbesondere die Form und räumliche Ausdehnung der Flecken muß notwendig noch von so vielen anderen Faktoren abhängen (endliche Distanz zwischen Antikathode und Kristall, Kristall und Platte; endliche Ausdehnung des Brennflecks; Inhomogenität der einfallenden Welle; Strukturfehler, deren gröbste in der „Streifung" zutage treten), daß der Temperatureinfluß möglicherweise vollständig überdeckt sein kann. Deswegen scheint es aber nicht minder nötig, die Theorie desselben möglichst detailliert zu entwickeln, da man doch nur dann hoffen darf, eine komplexe Erscheinung in ihre Bestandteile aufzulösen, wenn man den möglichen Einfluß jedes einzelnen Faktors kennt.

1) Der Differentialquotient nach y ist

$$\frac{y + (y^2-1)\operatorname{arctg} y}{y^2}.$$

Für $y \geq 1$ ist das sicher positiv. Für $0 < y < 1$ setzen wir $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, so daß $0 < x < \frac{\pi}{2}$, und erhalten

$$\frac{(\operatorname{tg} x - x)\cos x}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

was in dem betrachteten Gebiet ebenfalls immer positiv ist.

Daß die photographische Intensität eines Flecks mit steigender Temperatur abnimmt und schließlich verschwindet, ein Resultat, welches gleichmäßig aus meiner und aus der Debyeschen Theorie folgt, wird durch die Erfahrung bestätigt[1]).

Es scheint mir also nicht, daß meine Theorie, wie Herr Kern l. c. gemeint hat, mit den bisherigen Erfahrungen in Widerspruch steht, sondern im Gegenteil, daß sie mit denselben vollkommen im Einklang ist.

Zusammenfassung.

1. Das Interferenzbild einer Gitterlinie hängt, wenn die Zahl der Punkte hinreichend groß ist, nicht von den Randbedingungen ab.

2. Dies rührt daher, daß nur solche Atompaare merklich zur Interferenzintensität beitragen, welche nicht zu weit voneinander abstehen. Dieses dem natürlichen Empfinden entsprechende Resultat ergibt sich nach der hier dargelegten Theorie automatisch, ohne besondere Annahmen, was mir als ein Vorzug erscheint.

3. Die ursprüngliche Laue-Tanksche Auffassung, daß das rasche Verschwinden der länglichen Fleckenform bei Vergrößerung des Abstandes Kristall—Antikathode von der Wärmebewegung herrührt, muß nicht notwendig falsch sein, wie aus der Debyeschen Theorie zu folgen schien. Würde diese Auffassung durch die Erfahrung bestätigt, so wäre das als eine Bestätigung der hier dargelegten Theorie anzusehen.

4. Auch aus ihr ergibt sich eine Abnahme der photographisch beobachteten Fleckenintensität und ein schließliches Verschwinden bei steigender Temperatur, was mit den Beobachtungen stimmt. Die Fleckengröße und -form dürfte aber in den meisten Fällen wesentlich durch andere Faktoren bedingt sein.

1) Vgl. hierzu: M. v. Laue und J. Stephan van der Lingen, Experimentelle Untersuchungen über den Debyeeffekt, diese Zeitschr. **15**, 75, 1914.

Wien, II. physikal. Institut der Universität, den 4. April 1914.

(Eingegangen 6. April 1914.)

Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen.

Von Gunnar Nordström.

Es ist ja eins der großen Verdienste der Relativitätstheorie, daß sie den elektromagnetischen Zustand des Äthers durch einen Vektor, den Minkowskischen Sechservektor $\mathfrak{f}$ zu charakterisieren vermag, während nach der alten Auffassung hierfür zwei Feldvektoren erforderlich waren. Diese Möglichkeit, den Ätherzustand durch einen Vektor zu charakterisieren, wird aber hinfällig, sobald man außer dem elektromagnetischen Felde noch ein Gravitationsfeld im Äther annimmt. In den Gravitationstheorien, die Herr Mie[1]) und ich[2]) entwickelt haben, wird das Gravitationsfeld im Äther durch einen Vierervektor angegeben; wenn eine derartige Theorie der Wahrheit entspricht, wird also der Ätherzustand durch einen Sechservektor und einen Viererverktor charakterisiert.

Wir wollen die Komponenten des elektromagnetischen Sechservektors mit

$$\mathfrak{f}_{xy},\ \mathfrak{f}_{yz},\ \mathfrak{f}_{zx},\ \mathfrak{f}_{xu},\ \mathfrak{f}_{yu},\ \mathfrak{f}_{zu}$$

bezeichnen, indem $u = cit$ gesetzt ist, wo c die Lichtgeschwindigkeit. Für die Komponenten der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ hat man dann[3])

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{f}_{yz} = -\mathfrak{f}_{zy} \quad \text{usw.}, \\ -i\,\mathfrak{E}_x &= \mathfrak{f}_{xu} = -\mathfrak{f}_{ux} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Rein formal führen wir nun weiter für die Komponenten des Viererverktors des Gravitationsfeldes folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{f}_{wx},\ \mathfrak{f}_{wy},\ \mathfrak{f}_{wz},\ \mathfrak{f}_{wu},$$

(wobei $\mathfrak{f}_{xw} = -\mathfrak{f}_{wx}$ usw.) und schreiben folgende Gleichungssysteme auf:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xw}}{\partial w} &= \frac{1}{c}\mathfrak{f}_x, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yw}}{\partial w} &= \frac{1}{c}\mathfrak{f}_y, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zw}}{\partial w} &= \frac{1}{c}\mathfrak{f}_z, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial w} &= \frac{1}{c}\mathfrak{f}_u, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wu}}{\partial u} &= \frac{1}{c}\mathfrak{f}_w,
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

1) G. Mie, Ann. d. Phys. **40**, 25, 1913.
2) G. Nordström, diese Zeitschr. **13**, 1126, 1912; Ann. d. Phys. **40**, 872, 1913; **42**, 533, 1913.
3) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 58.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial u} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial u} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{ux}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial u} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{zw}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{xw}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{yw}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial w} &= 0, \\
\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial w} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

Die Gleichungssysteme sind beide vollkommen symmetrisch in bezug auf x, y, z, u, w. Sie haben natürlich zunächst keine physikalische Bedeutung; setzt man aber alle partiellen Ableitungen nach w gleich null, so findet man, daß sie in die Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes übergehen, indem $\mathfrak{f}_x, \mathfrak{f}_y, \mathfrak{f}_z, \mathfrak{f}_u$ die Komponenten des Viererstroms sind und $-\frac{1}{c}\mathfrak{f}_w$ die Ruhdichte der gravitierenden Masse[1]) ist. Die vier ersten Gleichungen in den beiden Systemen sind nunmehr die Maxwellschen Gleichungen in der von Minkowski gegebenen Form; die letzte Gleichung (I) ist die Fundamentalgleichung der Gravitation, und die sechs übrigen Gleichungen (II) drücken die Wirbellosigkeit des Gravitationsvektors aus.

Diese Deutung der Gleichungen (I), (II) zeigt, daß es berechtigt ist, die vierdimensionale Raumzeitwelt als eine durch eine fünfdimensionale Welt gelegte Fläche aufzufassen. In

1) Hierunter verstehe ich die Größe, die ich in den zitierten Aufsätzen mit $g \cdot v$ bezeichnet habe; es ist also

$$-\frac{1}{c}\mathfrak{f}_w = g \cdot v.$$

Man könnte ja allgemeiner für die Komponenten des Gravitationsvektors die Bezeichnungen $a\mathfrak{f}_{wx}$, $a\mathfrak{f}_{wy}$, $a\mathfrak{f}_{wz}$, $a\mathfrak{f}_{wu}$ einführen, wo a eine beliebige reelle oder imaginäre Konstante sein würde; dann würde man $-\frac{a}{c}\mathfrak{f}_w = gv$ haben. Es wird sich aber bei der Aufstellung des Impuls-Energiesatzes zeigen, daß a gleich $+1$ oder -1 sein muß, damit die letzte Gleichung (I) sich wirklich wie die übrigen verhalte.

jener fünfdimensionalen Welt sind die $\mathfrak{k}_m$ Komponenten eines Fünfervektors und die $\mathfrak{f}_{mn}$ Komponenten eines Zehnervektors; der letztere Vektor charakterisiert vollständig den physikalischen Zustand des Äthers. Die fünfdimensionale Welt hat eine ausgezeichnete Achse, die w-Achse; die vierdimensionale Raumzeitwelt steht senkrecht zu dieser Achse und in allen ihren Punkten sind die Ableitungen sämtlicher Komponenten von $\mathfrak{f}$ nach w gleich null.

Die Komponenten von $\mathfrak{f}$ lassen sich durch ein Fünferpotential mit den Komponenten Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_u, Φ_w ausdrücken, indem für jede Komponente von $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{f}_{mn} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial m} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial n}. \tag{2}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (I) findet man für den „Fünferstrom" $\mathfrak{k}$ die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{k}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{k}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{k}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{k}_u}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{k}_w}{\partial w} = 0, \tag{3}$$

und deswegen kann man für das Fünferpotential folgende sechs partielle Differentialgleichungen vorschreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_u}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial w} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial w^2} = \\ &\qquad = -\frac{1}{c}\mathfrak{k}_x, \\ &\frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial w^2} = \\ &\qquad = -\frac{1}{c}\mathfrak{k}_w. \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(4)\\ \\ (5)\end{matrix}$$

Von den fünf Gleichungen in (5) sind wegen Raumersparnis nur die erste und letzte ausgeschrieben. Wenn diese sechs Bedingungen erfüllt sind, befriedigen die Ausdrücke (2) identisch die Feldgleichungen (I), (II).

Unsere Formeln (I), (II) ermöglichen auch, den Impuls-Energiesatz für das kombinierte elektromagnetische und Gravitationsfeld in einheitlicher Weise aufzustellen. Um diesen Satz für die x-Richtung zu erhalten, multipliziere man diejenigen vier Gleichungen (I), die sich auf die übrigen Achsenrichtungen beziehen, mit $\mathfrak{f}_{xy}$, $\mathfrak{f}_{xz}$, $\mathfrak{f}_{xu}$, $\mathfrak{f}_{xw}$, und diejenigen sechs Gleichungen (II), die x enthalten, mit $\mathfrak{f}_{mn}$, wo m, n die beiden übrigen in der betreffenden Gleichung vorkommenden Indizes in richtiger Reihenfolge bedeuten. Die so erhaltenen zehn Gleichungen sind zu addieren, wonach eine einfache Umformung den gewünschten Satz gibt.

Wir wollen den Satz für die u-Richtung — also den Energiesatz — aufstellen und haben dann die drei ersten Gleichungen (I) mit $\mathfrak{f}_{ux}$, $\mathfrak{f}_{uy}$, $\mathfrak{f}_{uz}$, die letzte mit $\mathfrak{f}_{uw}$ zu multiplizieren. Weiter sind von den Gleichungen (II) die zweite, dritte, vierte, achte, neunte und zehnte mit bzw. $\mathfrak{f}_{ys}$, $\mathfrak{f}_{zx}$, $\mathfrak{f}_{xy}$, $\mathfrak{f}_{wx}$, $\mathfrak{f}_{wy}$, $\mathfrak{f}_{wz}$ zu multiplizieren. Wir erhalten durch Addition und nach einiger Umstellung der Terme

$$\begin{aligned} &\mathfrak{f}_{ux}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xw}}{\partial w}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{uy}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yw}}{\partial w}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{uz}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zw}}{\partial w}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{uw}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial z}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{yz}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uy}}{\partial z}\right) + \mathfrak{f}_{zx}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{uz}}{\partial x}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{xy}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{ux}}{\partial y}\right) + \mathfrak{f}_{wx}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial w}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{wy}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial w}\right) + \mathfrak{f}_{wz}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial w}\right) + \\ &+ \mathfrak{f}_{ux}\frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{uy}\frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{uz}\frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{uw}\frac{\partial \mathfrak{f}_{wu}}{\partial u} + \\ &+ \mathfrak{f}_{yz}\frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{zx}\frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{xy}\frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial u} + \\ &+ \mathfrak{f}_{wx}\frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{wy}\frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{wz}\frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial u} = \\ &= \frac{1}{c}(\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{k}_x + \mathfrak{f}_{uy}\mathfrak{k}_y + \mathfrak{f}_{uz}\mathfrak{k}_z + \mathfrak{f}_{uw}\mathfrak{k}_w). \end{aligned}$$

Eine einfache Umformung gibt die gesuchte Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{f}_{uy}\mathfrak{f}_{yx} + \mathfrak{f}_{uz}\mathfrak{f}_{zx} + \mathfrak{f}_{uw}\mathfrak{f}_{wx}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{f}_{xy} + +) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{f}_{xz} + +) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial w}(\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{f}_{xw} + +) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(-\mathfrak{f}_{ux}^2 - \\ &- \mathfrak{f}_{uy}^2 - \mathfrak{f}_{uz}^2 - \mathfrak{f}_{uw}^2 + \mathfrak{f}_{yx}^2 + \mathfrak{f}_{zx}^2 + \\ &+ \mathfrak{f}_{xy}^2 + \mathfrak{f}_{wx}^2 + \mathfrak{f}_{wy}^2 + \mathfrak{f}_{wz}^2) = \\ &= \frac{1}{c}(\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{k}_x + \mathfrak{f}_{uy}\mathfrak{k}_y + \mathfrak{f}_{uz}\mathfrak{k}_z + \mathfrak{f}_{uw}\mathfrak{k}_w). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Größen in den Klammern links sind Komponenten eines fünfdimensionalen Tensors, und die Gleichung hat demnach die Form

$$\frac{\partial P_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial P_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial P_{uu}}{\partial u} + \frac{\partial P_{uw}}{\partial w} = \mathfrak{K}_u. \tag{6a}$$

Indem man sie mit ic multipliziert und $\frac{\partial P_{uw}}{\partial w}$

gleich null setzt, erhält man die Energiegleichung in ihrer gewöhnlichen Form. Man findet so für die x-Komponente des Energiestromes

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_x &= ic\,(\mathfrak{f}_{wy}\mathfrak{f}_{yx} + \mathfrak{f}_{wz}\mathfrak{f}_{zx} + \mathfrak{f}_{ww}\mathfrak{f}_{wx}) \\ &= c\,(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y) - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\frac{\partial \Phi_w}{\partial x}.\end{aligned} \quad (7)$$

Der letzte Ausdruck ist mittels der Formeln (1) und (2) erhalten, und es sind die auftretenden Ableitungen nach w gleich null gesetzt. In vektoranalytischer Schreibweise lautet der Ausdruck für $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\nabla \Phi_w. \quad (7\,a)$$

Für die Energiedichte bekommt man ebenfalls aus (6) einen Ausdruck, der, vektoranalytisch geschrieben, lautet:

$$\psi = \frac{1}{2}\left|\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 + (\nabla \Phi_w)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\right)^2\right|. \quad (8)$$

Diese Ausdrücke für Energiestrom und Energiedichte setzen sich aus den bekannten Ausdrücken für die betreffenden Größen im elektromagnetischen Felde und im Gravitationsfelde additiv zusammen; was ja das gewünschte Resultat unserer Betrachtungen ist.

Man sieht leicht, daß die Behauptung in der Note S. 504 r. Sp. richtig ist, und daß also von den Komponenten des Zehnervektors $\mathfrak{f}$ und des Fünfervektors $\mathfrak{k}$ nur die mit einem Index w versehenen imaginär sind.

Durch Permutation der Indizes in Gleichung (6) erhält man vier andere Gleichungen. Die drei, die sich auf räumliche Achsenrichtungen beziehen, drücken natürlich den Impulssatz in bekannter Weise aus. Die Gleichung für die w-Richtung lautet nach Einführung der Feldstärken und des Gravitationspotentials Φ_w vektoranalytisch geschrieben

$$\begin{aligned}&-\operatorname{div}\left|[\mathfrak{H}, \nabla \Phi_w] + \frac{1}{c}\mathfrak{E}\frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\right| + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}\nabla \Phi_w) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}\left|\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2 - (\nabla \Phi_w)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t}\right)^2\right| = \\ &= -\frac{1}{c}\left|\mathfrak{k}\nabla \Phi_w + \mathfrak{k}_u\frac{\partial \Phi_w}{\partial u}\right|.\end{aligned}$$

Es ist vorläufig nicht einzusehen, daß dieser Gleichung eine physikalische Bedeutung zukäme.

Die obige Betrachtungsweise bietet, wie wir gesehen haben, formale Vorteile, indem nach ihr das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld als ein einziges Feld sich auffassen lassen. Ein neuer physikalischer Inhalt ist natürlich den Gleichungen damit nicht gegeben. Ich halte es indessen nicht für ausgeschlossen, daß die gefundene formale Symmetrie einen tieferen Grund haben könnte. Auf die Möglichkeiten, die man sich in dieser Hinsicht denken könnte, will ich jedoch hier nicht eingehen.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß eine einheitliche Behandlung des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes möglich ist, wenn man die vierdimensionale Raumzeitwelt als eine durch eine fünfdimensionale Welt gelegte Fläche auffaßt.

Helsingfors, 30. März 1914.

(Eingegangen 3. April 1914.)

Grundlagen einer relativistischen elektromagnetischen Gravitationstheorie. II.

Von Jun Ishiwara.

Im Anschluß an die im ersten Teil der oben genannten Arbeit mitgeteilte Gravitationstheorie[1]) versuche ich hier den Zusammenhang zwischen dem Gravitationsfeld und dem elektromagnetischen Feld zu ermitteln und damit die beiden fundamentalen Naturerscheinungen in das System eines einheitlichen physikalischen Weltbildes einzuordnen. Der Grundgedanke beruht auf dem Postulat, daß das Elektron dem materiellen Gebilde, welches als die Sinkstelle des Gravitationsfeldes aufgefaßt ist, identisch sei.

§ 1. Gravitierendes System.

Bevor ich die Theorie weiterführe, möchte ich mir erlauben, einige Verbesserungen der in der zitierten Arbeit gemachten Ansätze einzubringen.

Während ich nämlich dabei die Lichtgeschwindigkeit c unmittelbar als das Gravitationspotential angenommen habe, halte ich es nunmehr vom Standpunkt der Relativitätstheorie aus für rationeller, anzunehmen, daß das Gravitationspotential durch

$$\psi = c^2 \quad (1)$$

bestimmt sei[2]).

Dementsprechend sei der Ausdruck für die Wirkungsgröße eines abgeschlossenen Systems, welches aus dem Gravitationsfeld und seinen Quellen besteht, folgendermaßen bestimmt:

$$W' = \int \mathcal{H}'\, d\Sigma = \int \frac{1}{\alpha} F^2\, d\Sigma + \text{konst.}, \quad (2)$$

worin der Vierervektor

$$F = -\diamond \psi \quad (3)$$

1) Jun Ishiwara, diese Zeitschr. 15, 294, 1914.

2) Daß dadurch aber die Einheit der Masse geändert werden muß, kann man leicht aus einer Dimensionsbetrachtung ersehen. Vgl. unten §. 3.

die Feldstärke darstellt. a ist eine Zahlenkonstante.

Die Ableitung der Grundgleichung des Gravitationsfeldes aus diesem Ausdruck gestaltet sich in folgender Weise: Man sehe W' oder, da man hier die Koordinaten unvariiert läßt, vielmehr h' als Funktion von F und ψ an und berechne die Variation, die W' infolge selbständiger Variationen der Variabeln F und ψ erleidet. Dabei sollen aber die letzten Variationen derart stattfinden, daß die gesamte Variation der Feldstärke F doch verschwindet, also

$$\delta F = \delta_0 F + \frac{\partial F}{\partial \psi}\delta_0\psi = 0. \qquad (4)$$

Hierin ist durch das Zeichen δ_0 selbständige Variation der betreffenden Größe angedeutet.

Die entsprechende Variation von h' beträgt

$$\delta h' = \left(\delta_0 F, \frac{\partial}{\partial F}\right) h' + \delta_\psi h', \qquad (5)$$

wenn $\delta_\psi h'$ die von $\delta_0\psi$ herrührende Variation von h' bezeichnet. Dieses letzte ist aber wegen (2) und (3) gleich

$$\delta_\psi h' = \left(\delta_\psi F, \frac{\partial}{\partial F}\right) h' = -\frac{2}{a}(F, \diamond(\delta_0\psi)).$$

Daher wird (5) mit Rücksicht auf (4)

$$\delta h' = -\frac{2}{a} F \frac{\partial F}{\partial \psi}\delta_0\psi - \frac{2}{a} F \diamond(\delta_0\psi). \qquad (6)$$

Wir definieren nun die Ergiebigkeit ν der Feldquelle durch

$$\int a'\nu\delta_0\psi\, d\Sigma = -\int \frac{F}{a}\frac{\partial F}{\partial \psi}\delta_0\psi\, d\Sigma. \qquad (7)$$

a' ist eine Zahlenkonstante, deren Wert durch Experiment zu bestimmen ist.

Wir können jetzt für die Variation von W' gemäß (6) und (7) schreiben:

$$\delta W' = 2\int\left\{a'\nu\delta_0\psi - \frac{1}{a}F\diamond(\delta_0\psi)\right\} d\Sigma.$$

Nach partiellen Integrationen ergibt sich hiernach für das Verschwinden von $\delta W'$ die Bedingung:

$$\operatorname{div} F = -\diamond^2\psi = -a a'\nu, \qquad (8)$$

welches die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung ist.

Da nun vermöge (8)

$$\left.\begin{aligned}\int a'\psi\delta\nu\, d\Sigma &= -\int\frac{\psi}{a}\operatorname{div}(\delta F)\, d\Sigma = \\ &= -\int\frac{1}{a}F\delta F\, d\Sigma\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

ist, so bekommt man durch Addition von (7) und (9) und durch Integration die wichtige Beziehung:

$$a'\int\nu\psi\, d\Sigma = -\frac{1}{a}\int F^2\, d\Sigma + \text{konst.} \qquad (10)$$

Hieraus können wir schließen, daß der Ausdruck:

$$h' = -a'\nu\psi \qquad (11)$$

ebensogut wie (2) als die Dichte der Wirkungsgröße angenommen werden kann.

§ 2. Elektromagnetisches System.

Es handle sich nun um ein elektromagnetisches System, dem wir die Wirkungsgröße:

$$W'' = \int a''(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)\, d\Sigma \qquad (12)$$

zuschreiben wollen. a'' ist hier wieder eine Zahlenkonstante, $\mathfrak{E}$ ist die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, welche beide sich bekanntlich in einen Sechservektor H zusammenfassen lassen.

$$H = ((\mathfrak{H}, -i\mathfrak{E}))$$

stellt seine räumliche bzw. zeitliche Komponente dar. Da

$$H^2 = \mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2 \qquad (13)$$

ist, nimmt W'' eine einfache, zu W' ähnliche Form an:

$$W'' = \int a'' H^2\, d\Sigma. \qquad (12')$$

Dem Feldvektor H stellen wir ein Vektorpotential Φ gegenüber, welches der Gleichung:

$$H = \operatorname{Curl}\Phi = [\diamond\Phi, \diamond\Phi] \qquad (14)$$

genügt.

Die Ableitung der elektromagnetischen Grundgleichungen kann darauf in derselben Weise wie die Gravitationsfeldgleichung erfolgen. Wir sehen nämlich W'' als Funktion von H und Φ an und führen Variationen dieser Variabeln derartig aus, daß die gesamte Variation von H immerhin verschwindet.

Die Maxwellschen Gleichungen:

$$\operatorname{Div} H = P, \quad \operatorname{Div} H^* = 0 \qquad (15)$$

folgen hieraus, wenn man nur noch die Definition des elektrischen Viererstromes P so aufstellt:

$$\int P\delta_0\Phi\, d\Sigma = \int\left(\delta_0\Phi, \frac{\partial}{\partial\Phi}\right)\left(\frac{H^2}{2}\right) d\Sigma. \qquad (16)$$

Da nach (15)

$$\int\Phi\delta P\, d\Sigma = \int\Phi, \operatorname{Div}(\delta H)\, d\Sigma = \int H\delta H\, d\Sigma$$

ist, so kann man aus den beiden letzten

$$\int P\Phi\, d\Sigma = \int H^2\, d\Sigma + \text{konst} \qquad (17)$$

ableiten. Es zeigt sich daraus, daß der elektro-

---

1) Es soll bedeuten:

$$H^2 = H_{yz}^2 + H_{zx}^2 + H_{xy}^2 + H_{xt}^2 + H_{yt}^2 + H_{zt}^2.$$

Diese Bezeichnung weicht allerdings von der entsprechenden in meinen anderen Arbeiten (Jahrb. d. Radioakt. u. El. **9**, 560, 1912; Ann. d. Phys. **42**, 986, 1913 usw.) um den Faktor $\frac{1}{2}$ ab, weil dort

$$H^2 = H_{yz}^2 + H_{xy}^2 + H_{zx}^2 + H_{xz}^2 + \cdots$$

gesetzt ist.

magnetischen Wirkungsgröße entweder die Dichte

$$h'' = \alpha'' H^2 \quad \text{oder} \quad h'' = \alpha''(P\Phi) \qquad (18)$$

ebenso mit Recht zugeschrieben werden kann.

§ 3. Die Dynamik des Elektrons.

Es ist bloß eine Abstraktion, sich das Elektron ohne gravitierende Masse vorzustellen. Wenn es nun auch noch eine Frage bleibt, ob die gravitierende Masse des Elektrons mit seiner sogenannten elektromagnetischen Masse identisch ist, so müßte das doch wenigstens vom Standpunkt der reinen Theorie aus, die ein einheitliches Weltbild erzielt und nach deren Aufbauung wir bestrebt sind, schon der mögliche Fall sein. Auch die zahlreichen Erfahrungen, wenn sie auch ihre höchste Genauigkeit noch nicht erreichen, scheinen dafür zu sprechen. Die Identität der beiden genannten Massen zu verlangen, dürfte also nicht grundlos sein.

Diesem Gedanken nach stellen wir uns das Elektron vor als die Quelle des elektromagnetischen Feldes von konstanter Ergiebigkeit ϱ und zugleich als die Sinkstelle des Gravitationsfeldes von konstanter Dichtigkeit ν. Dieses ν sei die einzige Masse, die wir dem Elektron zuschreiben.

Wegen der Masse ν kommt dem Elektron nach (10) eine Wirkungsgröße von der Dichte $-\alpha' \nu \psi$ zu. Da wir die materielle Masse und die elektrische Ladung, wie eben gesagt, als ein und dasselbe physikalische Wesen auffassen wollen, so müssen wir zugeben, daß in der letzten Größe $-\alpha' \nu \psi$ die der Existenz der elektrischen Ladung zu verdankende Wirkungsgröße $\alpha''(P\Phi)$ schon mitgerechnet ist; mit anderen Worten dürfen wir sagen, daß das Auftreten der elektrischen Ladung und der wägbaren materiellen Masse zweierlei Erscheinungen der nämlichen Wirkungsgröße sind.

Dagegen sehen wir es auch als eine nachgewiesene Tatsache an, daß die ponderomotorischen Wirkungen des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes einander superponieren, ohne voneinander beeinflußt zu werden. Will man also die Wirkungsgröße des ganzen Systems aus den Feldgrößen berechnen, so hat man die den beiden Feldern eigenen Glieder $\frac{1}{\alpha} F^2$ und $\alpha'' H^2$ zu addieren, um die gesamte Wirkungsgröße zu erhalten.

Diese beiden letzten Forderungen zeigen sich in der Tat miteinander vereinbar, denn die in (10) mit „konst." bezeichnete Größe kann niemals gleich Null sein, weil ψ sich bei verschwindendem F einem konstanten Werte nähert, und daher könnte sie der reinen elektromagnetischen Feldwirkungsgröße entsprechen.

Danach wollen wir für die Wirkungsgröße des ganzen Systems festsetzen

$$W = -\alpha' \int \nu \psi \, d\Sigma = \int \left(\alpha'' H^2 + \frac{1}{\alpha} F^2 \right) d\Sigma . \qquad (19)$$

Die dynamischen Gleichungen des Elektrons lassen sich daraus in folgender Weise ableiten: Wir führen den Minkowskischen Bewegungsvektor

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \left(\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right) \qquad (20)$$

ein, wo $\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor im Weltraum, τ die Eigenzeit ist. Zwischen den letzten besteht die Beziehung:

$$|d\boldsymbol{r}| = ic\, d\tau = ic\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \qquad (21)$$

Da $\boldsymbol{v}^2 = -c^2$ ist, so kann man den Ausdruck (19) schreiben:

$$W = \alpha' \int \nu \boldsymbol{v}^2 \, d\Sigma . \qquad (19')$$

Indem man W als Funktion von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{r}$ betrachtet und $\delta(\nu\, d\Sigma) = 0$ fordert, erhält man

$$\delta W = \alpha' \int \nu \left(\delta_0 \boldsymbol{v}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \boldsymbol{v}^2 \, d\Sigma + \delta_r W = 2\alpha' \int \nu \frac{d}{d\tau} (\delta_0 \boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{v}\, d\Sigma + \delta_r W . \qquad (22)$$

$\delta_r W$ bedeutet die durch $\delta_0 \boldsymbol{r}$ bedingte Variation von W. Diese Variation hat man aber so auszuführen, daß jedes substantielle Differential trotz der Verschiebung von $\boldsymbol{r}$ doch konstant bleibt. Für die Feldvektoren seien also

$$\delta(H_\sigma d\sigma) = 0, \quad \delta(F_S dS) = 0,$$

wo $d\sigma$ ein zweidimensionales, dS ein dreidimensionales Element des Weltraumes ist.

Betreffs des elektromagnetischen Gliedes in $\delta_r W$ liegt eine vierdimensionale Berechnung von Herrn Henschke vor[1]). Von belanglosen Flächenintegralen abgesehen, lautet das Resultat:

$$\delta_r \int \alpha'' H^2 \, d\Sigma = 2\alpha'' \int (HP)\, \delta_0 \boldsymbol{r} \, d\Sigma . \qquad (23)$$

In ganz analoger Weise, aber viel einfacher, läßt sich das andere Glied in $\delta_r W$ berechnen, und man erhält[2])

1) E. Henschke, Berliner Dissertation 1912; Ann. d. Phys. **40**, 887, 1913. Auch J. Ishiwara, Ann. d. Phys. **42**, 986, 1913.

2) Vgl. J. Ishiwara, Ann. d. Phys., l. c., Zeile 5 auf S. 996. Algebraisches Zeichen von **div** $\boldsymbol{P}$ in den Zeilen 2, 5 und 10 ist dort beim Druck leider aus Versehen verwechselt.

$$\delta_r \int \frac{1}{a} F^2 \, d\Sigma = -\frac{2}{a} \int \operatorname{div} F, (F, \delta_0 r) \, d\Sigma. \quad (24)$$

Aus (22), (23) und (24) folgt daher die Bewegungsgleichung in vierdimensionaler Form:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} (a' \nu c \mathfrak{v}) = a''(HP) + a' \nu F. \quad (25)$$

Man bedenke nun, daß unser Ausdruck für die Wirkungsgröße dem üblichen gegenüber $c$mal so groß gewählt ist, was dadurch zustande kommt, daß als das Element der vierten Koordinaten statt dt hier cdt eintritt. Wir haben dementsprechend vorauszusetzen, daß die Masse ν in einer Einheit, die der gewöhnlichen gegenüber $c$mal groß ist, und sämtliche elektromagnetischen Größen in Einheiten, die $\sqrt{c}$mal größer sind als die gewöhnlichen, gemessen sind.

Sind die in gewöhnlichen Einheiten ausgedrückten Größen durch einen Strich gekennzeichnet, so ist zu setzen:

$$\nu = \frac{\nu'}{c}, \quad H = \frac{H'}{\sqrt{c}}, \quad P = \frac{P'}{\sqrt{c}}\,^{1}). \quad (26)$$

Dadurch wird die Gleichung (25)

$$\frac{d}{d\tau} (a' \nu' \mathfrak{v}) = a''(H' P') + a' \nu' F, \quad (25')$$

welches sich zerlegen kann in die räumliche bzw. zeitliche Komponente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{a'\nu'\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right) &= a''\varrho'\left(\mathfrak{E}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}']\right) - \\ &\quad - a'\nu'(\nabla\psi), \\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{a'\nu'c}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right) &= a''\varrho'(\mathfrak{E}'\mathfrak{v}) + a'\frac{\nu'}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (25'')$$

ϱ', $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ sind die zu ϱ, $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$ entsprechenden Größen, die aber in $\frac{1}{\sqrt{c}}$mal kleineren, gewöhnlichen Einheiten gemessen sind.

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist ohne weiteres klar. Bemerkenswert ist, daß die träge Ruhemasse nach (25″) mit der schweren Masse identisch ist. Wenn man noch postuliert:

$$a' = a'', \quad (27)$$

so kann man auch für die elektromagnetische Kraft den bekannten Ausdruck vollkommen unverändert behalten.

§ 4. Statisches Feld des Elektrons.

In einem mit dem Elektron festgebundenen Bezugssystem Σ_0 herrscht elektrostatisches Feld und auch statisches Gravitationsfeld. Die Feldstärken der beiden genannten Felder seien bezeichnet durch

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla_0 \varphi \text{ bzw. } \mathfrak{H}_0 = -\nabla_0 \psi. \quad (28)$$

Sie genügen den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 &= -\nabla_0{}^2 \varphi = \varrho_0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{H}_0 &= -\nabla_0{}^2 \psi = -a a' \nu. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Ihre Potentiale φ und ψ werden also nach der Potentialtheorie so bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varphi &= \int \frac{\varrho_0}{r_0} dv_0, \\ 4\pi\psi &= -aa' \int \frac{\nu}{r_0} dv_0 + 4\pi\psi_\infty, \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

r_0 ist dabei der Abstand zwischen dem Aufpunkt und der Feldquelle, $\psi_\infty = c_\infty^2$ der Wert von ψ im Unendlichfernen.

Durch Einsetzung von ψ geht der Ausdruck (19) in diesem Falle über in

$$\left.\begin{aligned} W &= -a' \int \nu \psi_\infty \, d\Sigma + \\ &\quad + \frac{a a'^2}{4\pi} \int \nu \, d\Sigma \int \frac{\nu}{r_0} dv_0 = \\ &= -\int \left\{ a' (\nabla_0 \varphi)^2 - \frac{1}{a} (\nabla_0 \psi)^2 \right\} d\Sigma. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Wie üblich, denken wir uns das Elektron als eine Kugel vom Radius a mit Flächenladung und daher unserer Annahme gemäß mit flächenhaft verteilten Massen. Indem wir die Gleichheit des zweiten Integrals im ersten Ausdruck (31) von W und des zweiten Gliedes im zweiten Ausdruck beachten, können wir die Ruhemasse des Elektrons daraus so berechnen:

$$m_0 = \int \nu \, dv_0 = \frac{1}{\psi_\infty} \int (\nabla_0 \varphi)^2 dv_0 = \frac{e^2}{4\pi a c_\infty^2}, \quad (32)$$

e ist die gesamte Ladung des Elektrons. Zwischen der in gewöhnlicher Einheit ausgedrückten Masse m_0' und der Ladung e' besteht offenbar dieselbe Beziehung wie (32).

Die Wirkungsgröße beträgt ferner nach (31)

$$\left.\begin{aligned} W &= -\frac{a'}{4\pi a} \int (e^2 - a a' m_0{}^2) \, c \, dt = \\ &= -\frac{a'}{4\pi a} \int (e'^2 - a a' m_0'^2) \, dt. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Die zwischen zwei ruhenden Elektronen von den Ladungen e_1 bzw. e_2 und von den Massen m_{01} bzw. m_{02} wirkende Kraft wird nach (25″) in genügender Annäherung gegeben durch

$$|\mathfrak{K}| = \left| \int (\mathfrak{E}_0' \varrho_0' - \mathfrak{H}_0 \nu') \, dv_0 \right| = \frac{1}{4\pi r_0^2} \left| \left(e_1' e_2' - \frac{a a'}{c_\infty} m_{01}' m_{02}' \right) \right|. \quad (34)$$

1) Damit ist gesagt: „Die Massendichte ν' in gewöhnlicher Einheit ist keine absolute Konstante, sondern sie ist der Quadratwurzel des Gravitationspotentials umgekehrt proportional.

§ 5. Zusammenfassung.

1. Das Relativitätsprinzip des infinitesimalen Raumzeitsystems gilt in strengem Sinne auch bei veränderlicher Lichtgeschwindigkeit.

2. Das Gravitationspotential ist durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen.

3. Das Elektron ist als ein elektromagnetisches, gravitierendes System betrachtet; es ist also nicht nur die Quelle des elektromagnetischen Feldes, sondern auch zugleich die Quelle des Gravitationsfeldes. Dabei ist aber der elektrischen Ladung und der wägbaren Masse wegen ihrer Identität ein und dieselbe Wirkungsgröße zuzuschreiben, während das Superpositionsprinzip ihrer Feldwirkungen andererseits gefordert ist.

4. Die träge Ruhemasse des Elektrons ist mit der Schweremasse identisch; sie ist genau gleich der durch $\frac{e^2}{2a}$ geteilten elektrostatischen Energie.

1) Vgl. G. Mie, Ann. d. Phys. **40**, 61, 1913.

London, 1. März 1914.

(Eingegangen 4. März 1914.)

Ein Röntgenspektroskop[1]).

Von Hermann Rohmann.

1.

W. H. und W. L. Bragg[2]) haben gezeigt, daß die von einer Röntgenröhre emittierte Strahlung neben einem kontinuierlichen Spektrum eine Anzahl scharfer intensiver Linien enthält.

Diese Tatsache, die wohl zugleich den ersten strengeren Nachweis für die Interferenznatur der von v. Laue und seinen Mitarbeitern beobachteten Erscheinungen bei Kristallen lieferte, wurde in folgender Weise gefunden.

Die Theorie der bei einem Kristallgitter zu erwartenden Interferenzerscheinungen zeigt, daß sich die Richtung der gebeugten Strahlen einer bestimmten Einfallsrichtung in derselben Weise zuordnet, als wenn der einfallende Strahl eine Reflexion an (in gewisser Weise beliebig) aus dem Kristallgitter herausgegriffenen Molekülschichten erlitten hätte. Und daß ferner die Wellenlänge λ der in einer bestimmten Richtung abgebeugten (reflektierten) Strahlung sich aus der Relation

$$n \cdot \lambda = 2d \sin\alpha \qquad (1)$$

bestimmt, wo n eine ganze (kleine) Zahl, d der Abstand zweier aufeinanderfolgender Molekülschichten der in Betracht kommenden Art und α der Winkel zwischen einfallendem bzw. gebeugtem Strahl und Molekülschicht ist.

Das Experiment zeigt nun, daß bei einem an der natürlichen Oberfläche eines Kristalls „reflektierten" Röntgenstrahl für bestimmte diskrete Werte des Einfallswinkels besonders starke Reflexion auftritt.

Mit Hilfe der Relation (1) lassen sich aus diesen Einfallswinkeln (unter Annahme bestimmter Werte für n) relative Werte für die Wellenlänge der einfallenden Strahlung bestimmen; also das Spektrum derselben aufnehmen.

(Daß die monochromatischen Strahlen wirklich schon in der einfallenden Strahlung enthalten sind und nicht erst im Kristall entstehen, ergibt sich aus der Tatsache, daß verschiedenartige Kristalle im wesentlichen das gleiche Spektrum für eine bestimmte Strahlung liefern).

Die Braggs, und bald nach ihnen Moseley und Darwin[1]) haben die reflektierten Strahlen mit Hilfe ihrer ionisierenden Wirkung untersucht.

M. de Broglie[2]) hat dann das Spektrum photographisch aufgenommen, indem er der analysierenden Kristallplatte eine geeignete kontinuierliche Bewegung gegen den einfallenden Strahl gab, und hat auf diese Weise eine Reihe sehr schöner Aufnahmen erzielt, die ein kompliziertes Linienspektrum der Röntgenstrahlung anzeigen.

Auch J. Herweg[3]) beschreibt einen im wesentlichen auf dem gleichen Prinzip des bewegten Kristalls beruhenden Röntgen-Spektrographen, mit dem er die Strahlung von Platin und Wolfram-Röntgenröhren untersucht hat. (Schon vorher[4]) hatte er eine Methode angegeben, die bei feststehendem Kristall das Röntgenstrahlenspektrum in einem kleinen Spektralbezirk photographisch aufzunehmen gestattet. Diese Methode ist aber praktisch, wenigstens bei den gebräuchlichen Ausführungsformen der Röntgenröhren kaum zu verwenden, da sie voraussetzt, daß man einen Spalt relativ nahe an die Antikathode heranbringen kann.)

Die Natur dieses Spektrums ist, wie mehrfach gefunden wurde, abhängig vom Anti-

1) Anm. b. d. Korr. Leider ist mir wegen der immer etwas verspäteten Zustellung der Compt. Rend. die Nr. 13 vom 30. März 1914, in der M. de Broglie und F. A. Lindemann die gleiche Verwendung des gebogenen Glimmerblatts beschreiben, erst zu Händen gekommen, nachdem mein Artikel schon in Druck gegeben war.

2) Proc. Roy. Soc. (A) **88**, 428, 1913.

1) Phil. Mag. (6) **26**, 210, 1913.

2) Compt. Rend. **157**, 924 u. 1413, 1913; **158**, 177, 1914.

3) Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 73, 1914.

4) Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 555, 1913.

kathodenmaterial der Röntgenröhren. (Herweg allerdings findet für *Pt* und *Wo* dasselbe Spektrum.)

2.

Bei der Bedeutung des vorliegenden Gegenstandes scheint es mir nicht überflüssig, im folgenden eine kleine Vorrichtung zu beschreiben, die das Spektrum der Röntgenstrahlung in technisch viel einfacherer Weise als die obigen Verfahren liefert und dazu eine mit Hilfe dieses Röntgenspektroskops gewonnene Spektralaufnahme mitzuteilen.

Das Spektroskop besteht aus einem zylindrisch gebogenen Glimmerblatt G, das in der aus Fig. 1

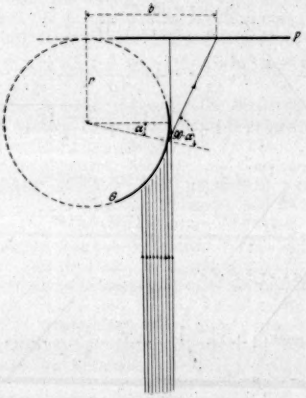


Fig. 1.

ersichtlichen Art und Weise der zu analysierenden Strahlung ausgesetzt wird.

(In der Fig. 1 ist der Einfachheit halber angenommen, daß die auffallenden Strahlen unter sich parallel sind, wie es leicht angenähert realisierbar ist.)

Man sieht, daß die verschiedenen Stellen des Glimmerblattes von der einfallenden Strahlung unter verschiedenen Winkeln getroffen werden, und also immer andere Wellenlängen reflektieren. Nach den früher erwähnten Arbeiten darf man annehmen, daß die Intensität der Reflexion einer bestimmten Wellenlänge nur für den exakten Einfallswinkel stark ist und bei kleinen Änderungen dieses Winkels sehr schnell abnimmt.

Wird also eine photographische Platte P in geeigneter Weise in den Gang der reflektierten Strahlen gebracht, so erhält man ein Spektrum der einfallenden Strahlung.

Bei der in Fig. 1 gemachten Annahme über die Stellung der photographischen Platte ergibt sich der einer bestimmten Linie zukommende Winkel α aus der leicht zu messenden Entfernung b und dem Krümmungsradius r des Glimmerblattes mit Hilfe der Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} b &= r\cos\alpha + r\,\mathrm{tg}\,2\alpha\,(1+\sin\alpha), \\ &\sim r(1+\alpha)^2 \sim r(1+2\alpha) \text{ für kleine } \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wenn die auffallende Strahlung von einem Spalt S in endlicher Entfernung herrührt, wird dieser Zusammenhang komplizierter; außerdem beeinflußt die Breite des Spaltes, wie aus Fig. 2

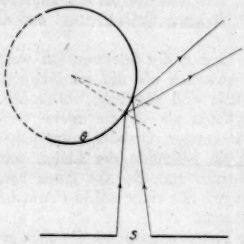


Fig. 2.

hervorgeht, die Schärfe der Linien. Maßgebend für letztere ist im wesentlichen der Winkel, unter dem der Spalt vom Krümmungszentrum des Glimmerblattes aus erscheint. Es ist günstig, einen engen Spalt zu wählen.

Ich habe bei den folgenden Dimensionen recht scharfe Spektren erhalten: Spaltbreite 0,7 mm; Entfernung des Spaltes vom Krümmungszentrum des Glimmerblattes ca. 20 cm; Krümmungsradius $r = 5$ cm; photographische Platte in der durch Fig. 1 angedeuteten Stellung. (Eine geeignet aufgestellte Bleiblende hielt direkte Strahlung von dem Teil der Platte ab, auf dem das Spektrum erscheint.)

Die Röntgenröhre war eine Gundelachsche Patentröhre c, die weich eingestellt war, Parallelfunkenstrecke 3 cm. Die Röhre hat Platinantikathode.

Fig. 3 zeigt eine mit dieser Anordnung erhaltene Aufnahme, Expositionsdauer 1 Stunde (retuschiert).

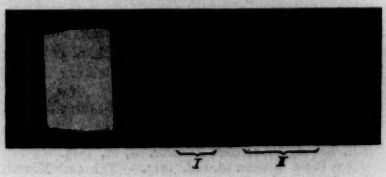


Fig. 3.

Man sieht neben einer Andeutung des bei kleinen Wellenlängen liegenden kontinuierlichen Spektrums zwei Gruppen von je vier Linien.

(Zunächst besteht natürlich eine gewisse Unsicherheit darüber, ob alle auftretenden Linien angesehen werden dürfen als reflektiert an den zur Oberfläche parallelen Molekülschichten, wie übrigens auch bei der Broglieschen Methode. Sie läßt sich aber durch Aufnahmen bei verschiedener Orientierung der Kristallplatte beseitigen.)

Ganz gleiche Spektren ergaben sich bei Anwendung verschiedener Krümmungsradien und bei verschiedener Orientierung der Glimmerblätter.

Auch haben die Spektren im wesentlichen dasselbe Aussehen wie die von Broglie; einige Unterschiede sind allerdings vorhanden.

Es scheint, als ob die zweite Gruppe das Spektrum zweiter Ordnung darstellt; jedoch stimmen die Abstände der Linien vom Krümmungszentrum und die aus ihnen berechneten Wellenlängen mit einer solchen Annahme nicht genau überein.

Diese Frage, ebenso wie die oben erwähnten Differenzen werden sich leicht beantworten lassen durch eine zweimalige Zerlegung nach Art der gekreuzten Spektren.

Straßburg i. E., Physik. Inst., 21. April 1914.

(Eingegangen 22. April 1914.)

Über die Schwankungen in der von einer radioaktiven Lösung emittierten α-Strahlung.

Von The Svedberg.

Die von einer flüssigen oder gasförmigen α-strahlenden Lösung emittierte Strahlung unterscheidet sich, wie ich zu zeigen versucht habe[1]), von der einer festen α-strahlenden Substanz dadurch, daß die Schwankungen in der Emission der α-Teilchen viel größer sind als für die feste Substanz. Diese Erscheinung habe ich als durch die von der molekularkinetischen Theorie geforderten spontanen Konzentrationsschwankungen in Lösungen hervorgerufen betrachtet. Gegen diese Auffassung hat besonders E. v. Schweidler[2]) die Ansicht geltend gemacht, daß in bezug auf die Häufigkeitsverteilung der zerfallenden Atome theoretisch kein Unterschied zwischen einer radioaktiven Lösung und einem festen radioaktiven Präparat zu erwarten sei. Durch die nachfolgende einfache Überlegung habe ich mich davon überzeugt, daß die von v. Schweidler vertretene Ansicht die richtige ist.

Im Volumen v_1 einer radioaktiven Lösung zerfallen während der Zeit τ im Mittel $a\nu$ Atome, und die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall von n Atomen sei $\frac{a^n \nu^n e^{-a\nu}}{\lfloor n}$. Im Teilvolumen $v_2 = \frac{v_1}{a}$ zerfallen also im Mittel ν Atome. Wenn die Bewegung der radioaktiven Moleküle von dem Atomzerfall unabhängig ist, so hat man nach der geometrischen Wahrscheinlichkeit für die Verteilung der zerfallenden Atome offenbar

$$w_0 = e^{-a\nu} + \frac{a-1}{a} \frac{a\nu e^{-a\nu}}{\lfloor 1} +$$

$$+ \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \frac{a^2\nu^2 e^{-a\nu}}{\lfloor 2} + \left(\frac{a-1}{a}\right)^3 \frac{a^3\nu^3 e^{-a\nu}}{\lfloor 3} +$$

$$+ \cdots = e^{-a\nu}\left(1 + \frac{a-1}{\lfloor 1}\nu + \frac{(a-1)^2}{\lfloor 2}\nu^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(a-1)^3}{\lfloor 3}\nu^3 + \cdots\right) = e^{-a\nu} \cdot e^{(a-1)\nu} = e^{-\nu},$$

$$w_1 = \frac{1}{a} \frac{a\nu e^{-a\nu}}{\lfloor 1} + \frac{2(a-1)}{a^2} \frac{a^2\nu^2 e^{-a\nu}}{\lfloor 2} +$$

$$+ \frac{3(a-1)^2}{a^3} \frac{a^3\nu^3 e^{-a\nu}}{\lfloor 3} + \cdots =$$

$$= \nu e^{-a\nu}\left(1 + \frac{(a-1)\nu}{\lfloor 1} + \frac{(a-1)^2\nu^2}{\lfloor 2} + \cdots\right) =$$

$$= \nu e^{-a\nu} e^{(a-1)\nu} = \nu e^{-\nu},$$

. . . . . .

$$w_n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{a^n \nu^n e^{-a\nu}}{\lfloor n} +$$

$$+ \frac{(n+1)(a-1)}{a^{n+1}} \frac{a^{n+1}\nu^{n+1} e^{-a\nu}}{\lfloor n+1} +$$

$$+ \frac{(n+2)^2 (a-1)^2}{a^{n+2}} \cdot \frac{a^{n+2}\nu^{n+2} e^{-a\nu}}{\lfloor n+2} \cdots =$$

$$= \frac{\nu^n}{\lfloor n} e^{-a\nu}\left(1 + \frac{(a-1)}{\lfloor 1}\nu + \frac{(a-1)^2\nu^2}{\lfloor 2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{\nu^n}{\lfloor n} e^{-a\nu} \cdot e^{(n-1)\nu} = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n} \qquad (1)$$

in Übereinstimmung mit der für ein festes Präparat gültigen Beziehung $w_n = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n}$.

Die an flüssigen Lösungen von Radiumchlorid und Poloniumchlorid und gasförmigen Lösungen von Radiumemanation angestellten Messungen geben nun Häufigkeitswerte, die von den aus der obigen Formel berechneten stark

1) Zeitschr. f. physik. Chem. **74**, 738, 1910; Arkiv f. Kemi etc. utg. af K. Svenska Vetensk.-Akad., Stockholm, **4**, Nr. 22, 1911 und Nr. 25, 1912; Die Existenz der Moleküle, Leipzig 1912; diese Zeitschr. **14**, 22, 1913.

2) Diese Zeitschr. **14**, 198, 1913. — Vgl. auch M. von Smoluchowski, diese Zeitschr. 13, 1069, 1912.

abweichen. Da die Zuverlässigkeit meiner experimentellen Untersuchungen mit Polonium und Radiumemanation von v. Schweidler[1]) und besonders von J. Perrin[2]) in Zweifel gezogen worden ist, so erscheint es mir wünschenswert, das Hauptresultat derselben in diesem Zusammenhang zu resümieren und zugleich einen kurzen Bericht über einige neue, noch nicht veröffentlichte Versuche mit Radiumchlorid zu geben.

Sämtliche Versuche haben gezeigt, daß derjenige Teil der radioaktiven Lösung, welcher sich in unmittelbarer Nähe der Begrenzungsflächen derselben befindet, eine Strahlung von besonderem Charakter aussendet, deren Intensität von der Natur und Behandlung dieser Flächen in hohem Grade abhängig ist. Die Schwankungen dieser „Grenzflächenstrahlung" gehorchen dem einfachen Verteilungsgesetz $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n}$.

Um die Schwankungen in der Strahlung der freien Lösung zu bestimmen, muß entweder die Wirkung der Grenzflächen auf der Lösung sehr stark herabgesetzt oder für die Grenzflächenstrahlung eine Korrektur angebracht werden. Bei den Versuchen mit Polonium und Radiumemanation habe ich den ersteren Weg eingeschlagen, bei den Versuchen mit Radium dagegen den zweiten. Die mit Polonium und Radiumemanation angestellten Messungen haben gezeigt, daß in den Fällen, wo es gelang, die Grenzflächenstrahlung fast völlig aufzuheben, die experimentell gefundenen Häufigkeitszahlen mit den aus der Formel

$$W_n = \frac{e^{-\nu} e^{\nu}}{\lfloor n} \sum_{m=0}^{n} \frac{A_m}{\lfloor m} \left(\frac{\nu}{e}\right)^m, \qquad (2)$$

$$A_m = m^n - \frac{m}{\lfloor 1}(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{\lfloor 2}(m-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}(m-3)^n + \cdots$$

berechneten, wie es die in Fig. 1 und 2 wiedergegebenen (noch nicht veröffentlichten) Diagramme zeigen, gut übereinstimmen.

Die aus der Formel (2) berechneten Werte sind durch eine voll ausgezogene Linie vereinigt worden, diejenigen aus der Formel (1) durch eine gestrichelte.

Die verwendete Poloniumlösung war durch kräftige Zentrifugierung von radioaktivem Staub möglichst sorgfältig befreit.

1) loc. cit.

2) La théorie du rayonnement et les quanta, Paris 1912, S. 218.

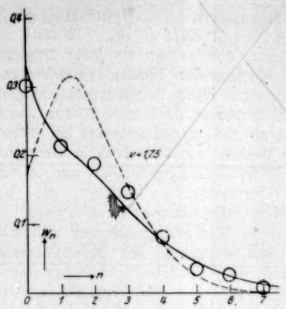


Fig. 1.

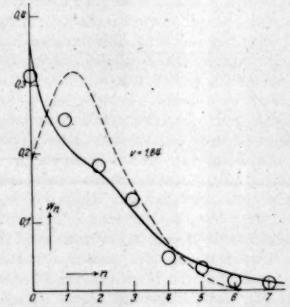


Fig. 2.

Die Abweichungen von den aus der einfachen Formel $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n}$ berechneten Werten sind so groß, daß sie unmöglich durch Versuchsfehler zu erklären sind. Registrierungen mit festen Präparaten haben übrigens, aus der guten Übereinstimmung zwischen den experimentellen und den aus der Formel $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n}$ berechneten Werten zu beurteilen, gezeigt, daß die Meßmethode eine befriedigende Genauigkeit zuläßt.

Die Versuche mit Radiumchlorid habe ich erst vor kurzem angestellt, und zwar weil es mir wünschenswert erschien, auch eine radioaktive Substanz mit gut bekannten chemischen Eigenschaften zu untersuchen, bezüglich deren man sicher sein kann, daß sie wirklich eine echte Lösung ohne radioaktive Teilchen (die z. B. durch Hydrolyse entstanden sein können) gibt. Die verwendete Radiumbariumchloridlösung, die ziemlich arm an Radium war, wurde durch Zusatz von Wismutchlorid, Einleitung von reinem

Schwefelwasserstoff und Abfiltrierung des Niederschlags von Radium *D*, *E*, *F* befreit und die Emanation unmittelbar vor jeder Registrierung durch Kochen der Lösung ausgetrieben. Da die während einer Registrierung neugebildete Emanationsmenge noch nicht 1 Proz. beträgt, so kommt als radioaktive Substanz bei diesen Versuchen praktisch nur Radium in Betracht. Die Versuche wurden folgenderweise ausgeführt. Auf einen fluoreszierenden Diamant, der in einer passenden Objektkammer montiert war[1]), wurde ein Tropfen Radiumchloridlösung gebracht und darauf ein Deckglas. Die Szintillationen wurden mit dem Zeißschen Apochromatobjektiv 3 mm n. Ap. 1,4 und Kompensationsokular Nr. 2 beobachtet und in der von mir früher beschriebenen Weise registriert. Es wurden immer unmittelbar nacheinander zwei Präparate untersucht, die mit derselben Lösung hergestellt waren, aber verschiedene Schichtdicke besaßen. Einerseits wurde das Deckglas direkt auf den Diamant gelegt, wobei, wie es sich herausstellte, von selbst eine solche Schichtdicke entstand, daß eben nur die Grenzflächenstrahlung der Diamanten- und Glasflächen zum Vorschein kam, die Strahlung der Lösung aber kaum bemerkbar war. Andererseits wurde zwischen Diamant und Deckglas ein Ring aus 0,1 mm Platindraht gelegt, so daß eine Schichtdicke der Radiumchloridlösung von 0,1 mm entstand (Fig. 3). Durch Untersuchung des ersten dünnen Präparats erhält man die Intensität der Strahlungen, welche von den Diamanten- und Glasflächen

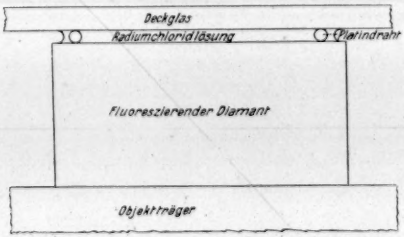


Fig. 3.

ausgesandt wurden und, da dieselben bei gleicher Behandlung der Flächen als annähernd gleich angesehen werden können, die Intensität der Grenzflächenstrahlung des Diamanten. Die Untersuchung des zweiten Präparats liefert die Intensität der Gesamtstrahlung von der Diamantenfläche und der durch die Reichweite der α-Strahlung abgegrenzten etwa 0,06 mm dicken Schicht der Lösung.

Wenn ν die Anzahl Szintillationen, welche von der α-Strahlung der Lösung während der Zeit τ innerhalb des Gesichtsfeldes des Mikroskops erzeugt werden, und ν_1 die entsprechende Zahl für die Grenzflächenstrahlung ist, so hat man

$$W_0' = \frac{W_0''}{e^{-\nu_1}},$$

$$W_1' = \frac{W_1''}{\nu_1 e^{-\nu_1}} - W_0' \nu_1,$$

$$W_2' = \frac{W_2''}{e^{-\nu_1}} - W_0' \frac{\nu_1^2}{|2} - W_1' \nu_1,$$

$$W_3' = \frac{W_3''}{e^{-\nu_1}} - W_0' \frac{\nu_1^3}{|3} - W_1' \frac{\nu_1^2}{|2} - W_2' \nu_1,$$

. . . . . .

$$W_n' = \frac{W_n''}{e^{-\nu_1}} - W_0' \frac{\nu_1^n}{|n} - W_1' \frac{\nu_1^{n-1}}{|n-1} - W_2' \frac{\nu_1^{n-2}}{|n-2} - \cdots - W_{n-1}' \cdot \nu_1,$$

wo

$$W_0' \cdots W_n'$$

sich auf die Strahlung im Inneren der Lösung,

$$W_0'' \cdots W_n''$$

sich auf die totale Strahlung der Lösung und der Grenzfläche beziehen.

Die in dieser Weise korrigierten experimentellen Häufigkeitszahlen $W_0' \cdots W_n'$ habe ich mit den nach der Formel (2) berechneten Werten verglichen. Die Übereinstimmung ist innerhalb der Fehlergrenzen der Versuche vollständig.

Aus den experimentellen Untersuchungen geht also, wie es mir scheint, unzweideutig hervor, daß die von dem Inneren einer radioaktiven Lösung emittierte α-Strahlung Schwankungen unterworfen ist, die nicht der einfachen Formel $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{|n}$, sondern der Formel (2) gehorchen. Wie ist nun diese Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie zu erklären?

E. v. Schweidler weist darauf hin, daß Abweichungen theoretisch zu erwarten sind, „wenn zwar zufällig auftretende, aber nicht unabhängig für jedes einzelne Atom geltende Bedingungen vorhanden sind, z. B. wenn ganze Schwärme von radioaktiven Atomen, die sich an Adsorptionskernen niedergeschlagen haben und mit diesen in der Lösung bewegen, in unregelmäßiger Weise in den wirksamen Bezirk eintreten oder ausbleiben". Um diese Möglichkeit, die von v. Schweidler übrigens unter Reserve angeführt wird, näher zu prüfen, habe ich das

1) Vgl. Die Existenz der Moleküle, Leipzig 1912, S. 225.

Häufigkeitsgesetz für die von einem dispersen radioaktiven System beliebigen Dispersitätsgrades emittierte α-Strahlung abzuleiten versucht. Betrachten wir also ein System vom Volumen v_1, das aus $a\nu$ Schwärmen radioaktiver Atome, d. h. aus $a\nu$ radioaktiven Teilchen, die in einem flüssigen oder gasförmigen Medium suspendiert sind, aufgebaut ist. Infolge der Brownschen Bewegung wird die Zahl ν der Teilchen, die sich in dem Teilvolumen $v_2 = \frac{v_1}{a}$ befinden, Schwankungen unterworfen sein, und zwar so, daß die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen von n Teilchen gleich $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n}$ ist[1]). In jedem Teilchen zerfallen während der Zeit τ im Mittel ν_1 Atome nach dem Häufigkeitsgesetz $\frac{\nu_1{}^n e^{-\nu_1}}{\lfloor n}$.

Gesucht: die Wahrscheinlichkeit für das Zerfallen von n Atomen im Volumen v_2 während der Zeit τ.

Wenn die Bewegung der Teilchen sehr lebhaft ist, so besteht offenbar kein Zusammenhang zwischen den Ortsbedingungen für die einzelnen zerfallenden Atome, d. h. in diesem Falle gilt wie für eine molekulare Lösung die Formel $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{\lfloor n}$. Der entgegengesetzte Grenzfall ist, daß die Bewegung der Teilchen so langsam ist, daß während der Zeit τ keine merklichen Ortsänderungen vorkommen[2]). Für diesen Fall ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten

$$w_0' = e^{-\nu} + \frac{\nu e^{-\nu}}{\lfloor 1} \cdot e^{-\nu_1} + \frac{\nu^2 e^{-\nu}}{\lfloor 2} \cdot e^{-\nu_1{}^2} + \frac{\nu^3 e^{-\nu}}{\lfloor 3} \cdot e^{-\nu_1{}^3} + \cdots = e^{-\nu} \cdot e^{\nu e^{-\nu_1}},$$

$$w_1' = \frac{\nu e^{-\nu}}{\lfloor 1} \cdot \nu_1 e^{-\nu_1} + \frac{2\nu^2 e^{-\nu}}{\lfloor 2} (\nu_1 e^{-\nu_1})^2 + \frac{3\nu^3 e^{-\nu}}{\lfloor 3} (\nu_1 e^{-\nu_1})^3 + \cdots =$$

$$= e^{-\nu} \cdot e^{\nu e^{-\nu_1}} \cdot \frac{\nu_1}{\lfloor 1} \cdot \nu e^{-\nu_1},$$

$$w_2' = e^{-\nu} e^{\nu e^{-\nu_1}} \cdot \frac{\nu_1^2}{\lfloor 2} [\nu e^{-\nu_1} + (\nu e^{-\nu_1})^2],$$

$$w_3' = e^{-\nu} e^{\nu e^{-\nu_1}} \cdot \frac{\nu_1^3}{\lfloor 3} [\nu e^{-\nu_1} + 3(\nu e^{-\nu_1})^2 + (\nu e^{-\nu_1})^3],$$

. . . . . .

$$w_n = e^{-\nu} e^{\nu e^{-\nu_1}} \cdot \frac{\nu_1^n}{\lfloor n} [k_1 \nu e^{-\nu_1} + k_2 (\nu e^{-\nu})^2 + k_3 (\nu e^{-\nu_1})^3 + \cdots],$$

$$w_{n+1} = e^{-\nu} e^{\nu e^{-\nu_1}} \cdot \frac{\nu_1^{n+1}}{\lfloor n+1} [k_1' \nu e^{-\nu_1} + k_2' (\nu e^{-\nu_1})^2 + k_3' (\nu e^{-\nu_1})^3 + \cdots],$$

wo

$$k_n' = n k_n + k_{n-1}.$$

Für alle anderen Grade der Lebhaftigkeit der Teilchenbewegung müssen die Häufigkeiten zwischen diesen Grenzwerten liegen, d. h. die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall von

o Atomen liegt zwischen

$$e^{-\nu} \quad \text{und} \quad e^{-\nu} e^{\nu e^{-\nu_1}},$$

1 Atomen liegt zwischen

$$\nu e^{-\nu} \quad \text{und} \quad e^{-\nu} e^{\nu e^{-\nu_1}} \frac{\nu_1}{\lfloor 1} \nu e^{-\nu_1}.$$

Ist ν_1 gleich eins, d. h. zerfällt in jedem Teilchen während der Zeit τ im Mittel ein Atom, so erhält man, wenn die Teilchen sich sehr langsam bewegen, die durch (2) ausgedrückten Wahrscheinlichkeiten. Wenn die genaue Gültigkeit dieser Häufigkeitsformel für das Innere einer radioaktiven Lösung als durch das Experiment für ein beliebiges Zeitintervall festgelegt angesehen wird, so folgt aus den obigen Rechnungen, daß die Erscheinung nicht durch permanente radioaktive Schwärme oder Teilchen, die im Lösungsmittel suspendiert sind, verursacht sein kann, denn die Formel (2) gilt für ein solches System nur für das spezielle Zeitintervall, wo $\nu_1 = 1$.

Tatiana Ehrenfest hat in einem interessanten Aufsatz[1]) nachgewiesen, daß die von mir früher[2]) für die Ableitung der Häufigkeitszahlen für eine radioaktive Lösung benutzten Ausgangsformeln „implizite eine gewisse Abhängigkeit zwischen den Konzentrations- und Zerfallsschwankungen" postulieren. Da diese Ausgangsformeln zu den Ausdrücken (2) führen, die wiederum mit den experimentellen Werten gut übereinstimmen, so folgt daraus, daß bei der α-Strahlung in Lösungen eine Abhängigkeit zwischen den Konzentrations- und Zerfallsschwankungen anzunehmen ist. Die Ursache dieser Abhängigkeit bleibt uns aber noch unbekannt. Vielleicht könnte dieselbe durch eine modifizierte Schwarmhypothese derart erklärt werden, daß durch die Tätigkeit der entlang der Bahn des α-Teilchens entstandenen Ionen eine kurzdauernde Anhäufung von radioaktiven Atomen in der Nähe jedes zerfallenden Atoms stattfindet. Eine

1) Vgl. Die Existenz der Moleküle, Leipzig 1912, S. 140.

2) Diese Bedingung war bei meinen Versuchen mit kolloiden Lösungen, l. c. vorige Note, erfüllt.

1) Diese Zeitschr. 14, 675, 1913.

2) l. c.

solche Annahme entbehrt aber noch jeder theoretischen und experimentellen Grundlage.

Upsala, Chemisches Universitätslaboratorium, April 1914.

(Eingegangen 20. April 1914.)

Thermionenströme im hohen Vakuum. (Thermionic Currents in High Vacuum.) II. Die Elektronenemission seitens des Wolframs und die Wirkung von Gasresten. (The Electron Emission from Tungsten and the Effect of Residual Gases [1]).)

Von Irving Langmuir.

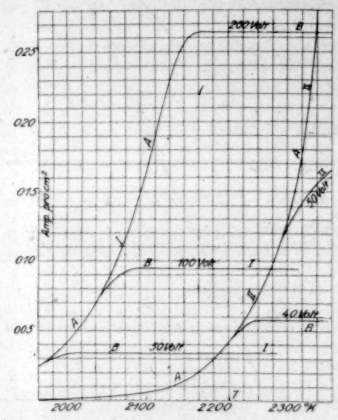
Im ersten Teile meiner Arbeit habe ich nachgewiesen, daß die Kurve, die den Thermionenstrom im hohen Vakuum als Funktion der Kathodentemperatur darstellt, im wesentlichen aus zwei Teilen besteht, nämlich:

1. einem Teil (A in Fig. 1), in welchem sich die Stromstärke mit der Kathodentemperatur nach der Gleichung von Richardson ändert, und von Stellung, Größe und Potential der Anode unabhängig ist;

2. einem Teil (B in Fig. 1), in welchem die Stromstärke von der Kathodentemperatur unabhängig ist, aber von Größe, Stellung und Potential der Anode abhängt.

Im allgemeinen werden diese Kurventeile beide selbst durch geringe Gasmengen (weniger als 1 μ Druck) sehr stark beeinflußt, aber beide Teile in entgegengesetztem Sinne. Die Gegenwart der meisten Gase setzt die Stromstärke im ersten Teile der Kurve herab, erhöht sie aber im zweiten Teile. In Fig. 1 ist eine Reihe typischer Kurven wiedergegeben. Die Kurven mit der Bezeichnung I zeigen den Thermionenstrom, den man in einem sehr hohen Vakuum (weniger als 0,001 μ Druck) erhält, und die mit II bezeichneten Kurven geben den Strom wieder, den man mit mäßigem Vakuum (Stickstoff unter 2,0 μ Druck) erhält.

Wie wir bereits gesehen haben, wird der Charakter des zweiten Teiles (B) der Kurve bestimmt durch die Begrenzung der Stromstärke infolge der seitens der Elektronen erzeugten Raumladung. Die Gegenwart eines Gases mit genügend hohem Anodenpotential führt zur Bildung positiver Ionen und zur teilweisen oder vollständigen Neutralisierung dieser Raumladung, so daß bei hoher Fadentemperatur und gegebenem Anodenpotential die Gegenwart von Gas den Thermionenstrom steigern kann, trotzdem sie die Elektronenemission herabsetzt. Bei Drucken von 1 μ oder darüber ist



Wirkung des Anodenpotentials und der Gasreste auf den Thermionenstrom.

Fig. 1.

die Begrenzung der Stromstärke durch die Raumladung häufig vollständig beseitigt, so daß die Stromstärke dann einzig durch die Elektronenemission seitens der Kathode bestimmt wird.

Von größerem Interesse ist die Wirkung von Gasen, die darin besteht, den Thermionenstrom längs des ersten Kurventeiles A zu verringern, da dieser Teil die eigentliche Elektronenemission seitens der Kathode darstellt.

In der vorliegenden Veröffentlichung wollen wir in erster Linie diese Elektronenemission und die Wirkung betrachten, welche Spuren verschiedener Gase auf sie haben.

Elektronenemission seitens reinen Wolframs im „vollkommenen Vakuum".

Eine sehr große Anzahl von Versuchen in äußerst hohem Vakuum hat übereinstimmend zu folgenden Schlüssen geführt:

1. Wenn das Vakuum mehr und mehr verbessert wird, nimmt die Thermionenemission bei gegebener Temperatur immer zu.

2. Von einem gewissen Punkte ab steigert indessen eine weitere Verbesserung des Vakuums die Elektronenemission nicht merklich. Mit anderen Worten: Die Elektronenemission erreicht einen bestimmten Grenzwert.

3. Im höchsten Vakuum folgt die Elektronenemission genau der Richardsonschen Gleichung.

4. Während eines Versuches nimmt bei

1) I: diese Zeitschr. 15, 348, 1914.

fortschreitender Verbesserung des Vakuums die „Konstante" b in der Richardsonschen Gleichung

$$i = a\sqrt{T}\, e^{-b/T}$$

auf einen bestimmten Wert ab. Die Kurven und die experimentell gefundenen Punkte, die in Fig. 2 wiedergegeben sind, liefern ein typisches Beispiel. Trägt man $\log (i/\sqrt{T})$ als

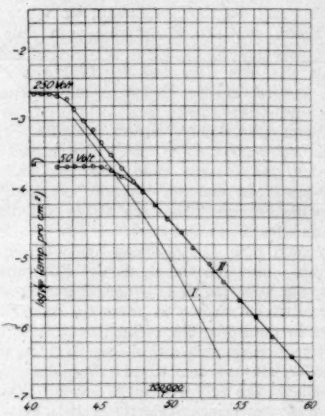


Fig. 2.

Funktion von $(1/T)$ auf, so müßte man eine Gerade erhalten, wenn die Ergebnisse mit der Gleichung von Richardson im Einklang stehen. Die Kurve I zeigt typische Ergebnisse, die erhalten worden sind, ehe alle Gaswirkungen verschwunden waren, während Kurve II die Ergebnisse wiedergibt, die bei einem Versuche mit einem sehr guten Vakuum gewonnen wurden. Die Abweichung der experimentell gefundenen Punkte von der Geraden bei höheren Temperaturen rührt von der Wirkung der Raumladung her.

5. Bei sehr reinem Wolfram im höchsten Vakuum ist der Wert von b 52500, und die Elektronenemission beträgt dann bei 2000° K[1]) 0,0042 Amp. per cm². Das ergibt für a den Wert:

$$a = 23{,}6 \times 10^6.$$

1) Die in dieser Arbeit genannten Temperaturen sind auf Grund der Gleichung

$$T = \frac{11230}{7{,}029 - \log_{10} H}$$

bestimmt worden, wo H die Gesamthelligkeit des Fadens in internationalen Kerzen per cm² projizierter Fläche ist. Nach dieser Skala hat sich der Schmelzpunkt des Wolframs zu 3540° K ergeben.

6. Gewisse nicht flüchtige Verunreinigungen im Wolfram können zu hiervon sehr abweichenden Ergebnissen führen, aber gewöhnliche in dem Faden enthaltene Gase verursachen keinerlei ernste Schwierigkeiten, weil sie beim Erhitzen des Fadens auf hohe Temperaturen sehr schnell abgegeben werden. Es wurden mehrere Proben von ausnehmend reinem Wolframdraht nach verschiedenen Verfahren besonders für diese Messungen hergestellt, und alle liefern sie praktisch identische Ergebnisse.

7. Die Elektronenemission seitens des Wolframs steht gänzlich außer Zusammenhang mit irgendwelchem Zerfall oder irgendwelcher Verdampfung des Metalls. Es wurden starke Elektronenströme Hunderte von Stunden lang erhalten (so beispielsweise in der Röntgenröhre von Coolidge[1])), und zwar ohne irgendwie größeren Verlust an Wolfram seitens der Kathode, als er durch normale Verdampfung ohne das Vorhandensein einer solchen Entladung bedingt wird. Es ist ferner dargetan worden, daß die bei hohen Fadentemperaturen in einem äußerst hohen Vakuum wirklich verdampfenden Wolframatome nicht elektrisch geladen sind (nicht durch ein elektrostatisches Feld abgelenkt werden können), selbst dann nicht, wenn gleichzeitig ein starker Elektronenstrom von dem Faden ausgeht.

8. Im höchsten Vakuum und bei reinem Wolfram zeigt die Elektronenemission keinen Ermüdungseffekt. Nach Hunderten von Stunden bleiben die Werte beider Konstanten der Richardsonschen Gleichung unverändert.

9. Die Elektronenemission im höchsten Vakuum ist gänzlich unabhängig vom Anodenpotential. Coolidge[2]) findet, daß dies selbst bei Potentialen von mehr als 100000 Volt zutrifft.

Bedingungen, unter denen man die normale Elektronenemission erhalten kann.

Wegen Raummangels kann ich die Einzelheiten der Versuche, auf welche die vorstehenden Schlußfolgerungen gegründet sind, hier nicht angeben. Einige der Versuche sind bereits in Physical Review beschrieben worden, und andere sollen in späteren Veröffentlichungen beschrieben werden. Indessen wird eine Besprechung der hauptsächlichsten Vorsichtsmaßregeln, die erforderlich sind, um eine enge Annäherung an die normale Elektronenemission im Vakuum zu erreichen, hier wohl am Platze sein.

1. Der Partialdruck gewisser Gase, besonders des Sauerstoffs und solcher Gase, die Sauerstoff

1) Phys. Rev. (2) **2**. 409, 1913.
2) a. a. O.

enthalten, muß überaus niedrig gehalten werden. Drucke von Sauerstoff oder Wasserstoff, die anscheinend noch niedriger sind als 0,001 μ, verursachen eine ausgeprägte Abnahme der Elektronenemission seitens des Wolframs. Stickstoff auf 0,01 μ Druck verschlechtert ebenfalls die Ergebnisse. Reiner trockner Wasserstoff, Argon oder Quecksilberdampf haben dagegen selbst bei Drucken bis zu 1 μ oder zuweilen gar noch viel höher wenig oder gar keinen Einfluß.

2. Wasserdampf ist besonders störend. Um eine Abnahme der Elektronenemission aus dieser Ursache zu vermeiden, sollte man den ganzen Glasapparat eine Stunde lang oder noch länger bei einer Temperatur von mindestens 360° C austrocknen, und den auf diese Weise in eine Falle getriebenen Wasserdampf in flüssiger Luft kühlen. Alle Schliffe, sowie die Verwendung von Siegellack usw. müssen vermieden werden.

Selbst bei Verwendung der Gaedeschen Molekularpumpe ist es notwendig, den Apparat auszutrocknen und eine Falle mit flüssiger Luft anzuwenden, wenn man gute Ergebnisse haben will.

3. Nachdem man auf diese Weise möglichst viel Wasserdampf aus der Röhre herausgetrieben hat, muß man die Elektroden von Gas befreien. Um dies leichter zu ermöglichen, ist es wünschenswert, als Anode einen Wolframfaden zu verwenden, den man auf hohe Temperatur erhitzen kann. Die Zuleitungen sollten kurz und am besten aus solchem Platin hergestellt werden, das im Vakuum erhitzt worden und auf elektrischem Wege an den Wolframfaden angeschweißt ist. Es ist wünschenswert, diese Anode möglichst nahe an die Kathode heranzubringen, da sonst die Raumladungseffekte die Thermionenstromstärken sehr beschränken, sofern man nicht sehr hohe Potentiale anwendet.

Sollen massive Zylinder oder Platten als Anode benutzt werden, so müssen sie aus Wolfram oder Molybdän sein (das infolge des Herstellungsverfahrens verhältnismäßig frei von Gasen ist) und am besten in einem Wolframrohr-Vakuumofen[1]) erhitzt werden, um weitere Gasspuren auszutreiben. Man kann sie jedoch auch dadurch gasfrei machen, daß man sie einem kräftigen Elektronenbombardement (mit mehreren Tausend Volt) aussetzt und dabei starke Thermionenströme seitens der erhitzten Kathode benutzt, um die Anoden zu heller Glut zu bringen. Dieses Verfahren muß vorsichtig ausgeführt werden, damit nicht schneller Gas entbunden wird, als es durch die Pumpe beseitigt werden kann. Für diesen Zweck ist eine Molekularpumpe besonders vorteilhaft. Wenn mehr Gas entbunden wird, als die Pumpe zu fördern vermag, tritt eine starke positive Ionisierung ein, und die Kathode zerfällt rasch infolge positiven Ionenbombardements.

Die Entfernung des Gases aus dem Kathodenfaden ist einfacher und erfordert nur ein wenige Minuten andauerndes Erhitzen auf eine Temperatur von etwa 2700° K.

4. Die besten Ergebnisse erhält man bei der Messung der Elektronenemission, wenn man die Röhre mit den Elektroden vom Pumpensystem abschmilzt, nachdem so viel Gas wie angängig aus dem Glas und den Elektroden entfernt worden und der Druck bis mindestens auf 0,1 μ erniedrigt worden ist.

Wenn man dann Wolfram aus einem Hilfsfaden (bei 3000° K) in die Röhre hinein verdampfen läßt, kann man alle gewöhnlichen Gase beseitigen und ein Vakuum erhalten, das wahrscheinlich viel höher ist, als es sich durch mechanische Hilfsmittel erreichen läßt[1]). Gleichzeitig kann man den gasfreien Niederschlag von Wolfram, der sich dabei an der Röhrenwand bildet, als ausgezeichnete Anode benutzen. Zu diesem Zwecke muß man zuvor ein Paar Platindrähte in die Röhre eingeschmolzen haben. Das Wolfram schlägt sich auf diesen Drähten ebenso nieder wie auf dem Glase und bildet oft auf dem Glase eine Schicht von so hoher Leitfähigkeit, daß der Gesamtwiderstand zwischen den beiden Platindrähten nicht mehr als 30 bis 40 Ohm beträgt.

Eine Vergrößerung des Stieles, auf dem die Kathode und der Hilfsfaden befestigt sind, wirft einen „Schatten" in den Wolframniederschlag und verhindert die Bildung einer metallisch leitenden Bahn vom Kathodenfaden zum Niederschlag an der Röhrenwand.

5. Während der Messung der Elektronenemission ist es erwünscht, die Röhre so kühl wie möglich zu halten. Die Erzielung übereinstimmender Werte wird dadurch sehr erleichtert, daß man die ganze Röhre in flüssige Luft eintauchen läßt, und zwar nicht nur während der Messungen, sondern auch während der Reinigung von Gasen und der Bildung des Niederschlages an der Röhre seitens des Hilfsfadens.

6. In den meisten Fällen werden, bis die Gasreste durch Verflüchtigung von Wolfram und gründliches Altern der Röhre vollständig beseitigt worden sind, verschiedene Anzeichen für die Gegenwart von Gasen bestehen bleiben. Die wichtigsten dieser Gaseffekte sind folgende:

1) Coolidge, a. a. O.

1) Langmuir, Zeitschr. f. anorg. Chem. **85**, 261, 1914; Proc. Am. Inst. El. Eng. **32**, 1895, 1913.

a) Verschiedene Verzögerungseffekte. Beispielsweise kann nach Veränderung der Kathodentemperatur oder des Anodenpotentials einige Zeit verstreichen, ehe der Strom stetig wird.

b) Selbst bei niedrigen Fadentemperaturen, bei denen die Stromstärke vom Anodenpotential unabhängig sein sollte (A in Fig. 1), kann man finden, daß die Stromstärke sich doch mit der Spannung ändert. Zuweilen nimmt sie mit wachsendem Potential ab, häufiger indessen nimmt sie mit wachsendem Potential zu.

c) Bei hohen Fadentemperaturen (B in Fig. 1) kann das Vorhandensein von Gasen bewirken, daß die Stromstärke mit der Spannung rascher wächst als deren $^3/_2$te Potenz.

d) Zuweilen kann die Kurve, die i als Funktion von T darstellt, einen oder mehrere scharfe Spitzen oder Knicke aufweisen, mitunter nur bei steigender Temperatur, häufig aber auch bei fallender.

e) Ein blaues Glimmlicht oder eine sichtbare Entladung tritt, selbst bei hoher Spannung mit starken Thermionenströmen, nur dann auf, wenn verhältnismäßig große Gasmengen vorhanden sind. Eine unvollständige Beseitigung des Gases aus der Anode ist die gewöhnliche Quelle derartiger Schwierigkeiten. Unter richtigen Verhältnissen soll bei 200 bis 400 Volt keine sichtbare Entladung vorhanden sein, selbst dann nicht, wenn ein Strom von mehreren Milliampere fließt. Bei Verwendung massiver Anoden, die richtig bei hohen Temperaturen von Gasen befreit worden sind, soll bei keinem Potential ein blaues Glimmlicht vorhanden sein (siehe z. B. die Coolidge-Röhre).

7. Falls man eine kleine Anode, etwa einen Wolframfaden, verwendet, kann man auf Schwierigkeiten infolge einer Anhäufung negativer Ladungen auf dem Glase treffen. Diese Ladungen treten besonders leicht dann auf, wenn man die Röhre in flüssige Luft eintaucht, und haben häufig ein vollkommenes Aufhören des Thermionenstromes zur Folge, wenngleich 300 bis 400 Volt an die Anode angelegt sind. Ein derartiger Effekt hat wahrscheinlich das Verschwinden der Thermionenströme aus Kohle bei niedrigen Drucken bei den Versuchen von Pring verursacht.

In vielen Fällen wird man die Ladung auf dem Glase dadurch, daß man einen positiv geladenen Körper nahe an die äußere Oberfläche der Röhre heranbringt, genügend neutralisieren, um dem Thermionenstrom ein Anwachsen auf seinen normalen Wert zu ermöglichen.

Derartige Effekte verschwinden vollständig, wenn man einen Wolframniederschlag auf der Röhre als Anode verwendet.

Wirkungen niedriger Gasdrucke auf die Elektronenemission.

Ich habe sehr zahlreiche Versuche angestellt, um die Wirkung verschiedener Gase bei Drucken von meist weniger als 2 μ zu erforschen. Die untersuchten Gase waren: Wasserdampf, Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Kohlenoxyd, Kohlendioxyd, Phosphin, Phosphordampf, Argon, Quecksilberdampf usw.

Die Versuche wurden für gewöhnlich mit zwei einzelnen Fäden mit einfachem Bügel („Haarnadelfäden") angestellt, die nebeneinander in einer kleinen zylindrischen Röhre angebracht waren; diese Röhre war an ihrem oberen Ende durch ein Glasrohr mit einem Entlüftungssystem verbunden, das im wesentlichen aus einer Toeplerpumpe, einem Mc Leod-Manometer und einem Apparat zur Analyse kleiner Gasmengen bestand. Die Röhre war so angeordnet, daß sie sich während des Versuches vollständig in flüssige Luft tauchen ließ. Außerdem war zwischen die Lampe und das übrige System eine Gasfalle eingeschaltet, und diese blieb für gewöhnlich während des ganzen Versuches in flüssige Luft getaucht. Hähne wurden nicht verwendet. Alle Schliffe waren aus angeschmolzenem Glas. Ein elektrisch geheizter Ofen konnte so über die Lampe gesenkt werden, daß diese während langer Zeiten auf 360° C erhitzt werden konnte. Die auf diese Weise entwickelte Feuchtigkeit und Kohlensäure wurden in die mit flüssiger Luft gekühlte Gasfalle hineingetrieben, und der aus dem übrigen System kommende Quecksilberdampf wurde am Eintritt in die Lampe gehindert.

Die Fäden in der Röhre hatten getrennte Zuleitungen, so daß jeder von ihnen als Kathode benutzt werden konnte, während der andere als Anode diente. Bei einem Versuch wurde als Anode ein großer Zylinder aus Platinfolie benutzt, während bei anderen Versuchen Molybdänzylinder zur Anwendung kamen.

Die Versuche über die Wirkungen von Gasen scheinen alle die nachstehende allgemeine Theorie zu stützen.

Theorie der Wirkung von Gasen auf die Elektronenemission.

Die durch gewisse Gase verursachte Abnahme der Elektronenemission seitens einer heißen Kathode beruht auf der Bildung einer Haut auf der Oberfläche dieser Kathode. Ob diese Haut aus adsorbiertem Gas besteht oder aus

einer chemischen Verbindung des Gases mit der Kathode, ist nicht mit Sicherheit festgestellt, aber die Anzeichen sprechen zumeist zugunsten der letzteren Ansicht. In welchem Maße die Elektronenemission durch die Oberflächenhaut vermindert wird, hängt davon ab, in welcher Ausdehnung die Kathode bedeckt wird. Man muß die Haut oder die Schicht ansehen, als bestehe sie aus einer einzigen Lage von Molekülen oder höchstens aus sehr wenigen Lagen.

Die Ausdehnung, in welcher die Kathode von der Schicht bedeckt wird, hängt von folgenden Faktoren ab:

1. von der Schnelligkeit, mit der sich die Schicht bildet;
2. von der Schnelligkeit, mit der die Schicht zerstört wird. Nur wenn diese beiden Faktoren einander gleich sind, wird die Dicke der Schicht konstant bleiben; anderenfalls wird sich die Elektronenemission mit der Zeit ändern, und man wird gewisse Verzögerungs- oder Ermüdungseffekte beobachten.

Die Schicht kann sich auf folgende Weise bilden:

1. durch Adsorption von Gas an der Oberfläche der Kathode;
2. durch direkte chemische Reaktion zwischen dem Gase und dem Faden;
3. durch Reaktion zwischen dem Faden und positiven Ionen, die mit hinreichender Geschwindigkeit auf ihn auftreffen.

Die Schicht kann durch folgende Ursachen vernichtet werden:

1. durch Verdampfung;
2. durch chemische Zersetzung;
3. durch Kathodenzerstäubung, d. h. durch Beseitigung infolge eines Bombardements durch positive Ionen.

Versuchsergebnisse.

Wasserdampf.

Die ausgeprägte Wirkung ganz geringer Gasdrucke auf die thermionische Emission wurde zum ersten Male beobachtet, als es sich herausstellte, daß die Temperatur der Röhre häufig einen sehr großen Einfluß auf die Stromstärke hat, die man erhält. Bei einem Versuch, bei dem die Röhre (aber nicht das Rohr, das zu der in flüssige Luft tauchenden Gasfalle führt) eine Stunde lang bei 360° C ausgeglüht worden war und kleine Mengen Wasserstoff eingelassen worden waren, worauf dann die Röhre nochmals ausgepumpt worden war, wurde beispielsweise ein Thermionenstrom von 1,1 Milliampere erhalten, während sich der Faden auf 2190° K und die Röhre auf Zimmertemperatur befand. Eine Erwärmung der Röhre durch einfaches Auflegen der Hand verminderte die Stromstärke auf 0,3 Milliampere, während durch Umgeben der Röhre mit Eiswasser die Stromstärke auf 3,8 Milliampere gesteigert wurde. Flüssige Luft lieferte indessen dasselbe Ergebnis wie Eiswasser. Es wurde eine Beobachtung ausgeführt, während die Röhre in flüssige Luft tauchte, und die Konstanten der Richardsonschen Gleichung ergaben sich als

$$a = 20{,}4 \times 10^6 \text{ Amp. per cm}^2,$$
$$b = 55600.$$

Aus diesen Daten läßt sich die Elektronenemission bei 2000° K zu 0,77 Milliampere per cm² berechnen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir diese Größe (nämlich die Elektronenemission bei 2000° K, ausgedrückt in Milliampere per cm²) i_0 nennen. Es bietet große Vorteile, die Versuchsergebnisse durch i_0 und b auszudrücken, statt durch a und b. Eine sehr geringe Änderung von b verursacht eine gewaltige Änderung von a, selbst dann, wenn i_0 konstant bleibt. Es ist daher unmöglich, die Größenordnung der Elektronenemission durch Betrachtung von a allein zu beurteilen.

Nachdem somit i_0 und b bestimmt worden waren, während die Röhre in flüssige Luft eintauchte, wurde die Elektronenemission gemessen, während die Röhre in warmes Wasser (62° C) tauchte; das Ergebnis war:

$$a = 7{,}7 \times 10^{16},$$
$$b = 105000,$$
$$i_0 = 0{,}055 \text{ Milliampere per cm}^2.$$

Eine Erwärmung der Röhre verdoppelte also den Wert von b nahezu und verringerte die Elektronenemission bei 2000° K bis auf etwa 7 v. H. ihres ersten Wertes.

Diese Wirkungen können mehrere Tage lang bestehen bleiben, selbst wenn man beständig flüssige Luft auf einer nahe an der Lampe angebrachten Gasfalle beläßt und die Rohrleitung von der Lampe zur Gasfalle einen inneren Durchmesser von 8 bis 10 mm hat. Eine abermalige Erhitzung der Röhre auf 360° C mit darauffolgender Abkühlung, besonders wenn das Rohr zwischen der Röhre und der Gasfalle in flüssiger Luft ebenfalls ausgeglüht wird, beseitigt die Empfindlichkeit der Elektronenemission gegen die Röhrentemperatur. Andererseits hat das Entfernen der flüssigen Luft von der Gasfalle, sei es auch nur für den Bruchteil einer Minute, zur Folge, daß alle diese Effekte mit größerer Intensität als zuvor wieder auftreten.

Aus diesen Tatsachen können wir den Schluß ziehen, daß die Wirkung der Zimmertemperatur auf die Verstärkung der Elektronenemission einzig auf der Entbindung von Wasserdampf unter sehr niedrigem Druck beruht. Daß der-

artige Effekte selbst dort auftreten und bestehen bleiben, wo Vorsichtsmaßregeln zur Beseitigung des Wasserdampfes getroffen werden, ist das beste Anzeichen dafür, daß die Partialdrucke des Wasserdampfes, der diese Wirkungen hervorbringt, äußerst gering sind. Ein Druck des Wasserdampfes von weniger als 0,001 μ hat vermutlich einen ausgesprochenen Einfluß auf die Elektronenemission.

Sauerstoff.

Es ergab sich, daß dieses Gas einen überaus starken Einfluß im Sinne einer Herabsetzung der Elektronenemission hat. Beispielsweise verminderte bei einem Faden von 2190° K die plötzliche Zulassung von 5 μ reinen Sauerstoffs die Elektronenemission augenblicklich von 3,1 Milliampere auf 0,13 Milliampere. Obgleich der Sauerstoff schnell verschwand, betrug doch die Elektronenemission nach 10 Minuten nur 0,9 Milliampere und nach 30 Minuten 2,7 Milliampere. Spätere Messungen sprechen dafür, daß ein Druck des Sauerstoffes von nur 0,001 μ eine deutliche Wirkung auf die Elektronenemission hat.

Bei niedrigem Sauerstoffdruck ergab sich der Wert von b zu 94000.

Die Wirkung des Sauerstoffs, die Elektronenemission zu verringern, ist anscheinend unabhängig vom Anodenpotential. Die Haut, die sich bildet, ist also nicht von einer positiven Ionisierung abhängig.

Es ist dargetan worden[1]), daß Sauerstoff bei niedrigen Drucken mit Wolfram reagiert und WO_3 bildet, und daß bei 2000° K etwa 5 v. H. aller auf die Oberfläche auftreffenden Sauerstoffmoleküle sich mit dem Wolfram zur Bildung von WO_3 vereinigen. Es ist klar, daß auf der Metalloberfläche eine Schicht vorhanden sein muß, die Sauerstoff in irgendeiner Form enthält, denn die Geschwindigkeit der Reaktion ist viel zu groß, als daß sie trimolekular sein könnte, d. h. daß sie auf dem gleichzeitigen Zusammenstoß zweier Sauerstoffmoleküle und eines Wolframatoms beruhen könnte, es sei denn, daß eines der Sauerstoffmoleküle schon auf der Oberfläche vorhanden wäre. Die Dicke einer solchen Schicht muß äußerst gering sein, da ja die optischen Eigenschaften (Wärme- und Lichtstrahlung) durch die Gegenwart von Sauerstoff unter so niedrigen Drucken nicht wahrnehmbar verändert werden.

Stickstoff.

Dieses Gas setzt gleichfalls die Elektronenemission herab, wenngleich nicht so stark wie Sauerstoff (vielleicht $^1/_{10}$ so stark bei demselben Druck). Die Wirkung des Stickstoffs scheint stark vom Anodenpotential und von anderen Faktoren abhängig zu sein, welche die Stärke der positiven Ionisierung bestimmen, die auftreten kann. Im allgemeinen nimmt die Elektronenemission in Stickstoff unter niedrigem Druck ab, wenn das Anodenpotential gesteigert wird. Das rührt wahrscheinlich von der Bildung einer unbeständigen Nitridschicht auf der Oberfläche infolge des Bombardements positiver Stickstoffatomionen her. Ich habe gezeigt[1]), daß Stickstoff das Wolfram bei allen Temperaturen und Drucken nicht merklich angreift, daß es sich aber quantitativ mit allem Wolframdampf verbindet, den der Faden abgibt, und mit ihm WN_2 bildet. Unter dem Einfluß von Thermionenströmen wird indessen, wie sich herausgestellt hat, das Wolfram tatsächlich unter Bildung des Nitrids angegriffen (elektrochemische Stickstoffbeseitigung). Vermutlich bewirkt die hohe kinetische Energie der positiven Stickstoffionen, die auf die Oberfläche auffallen, ihre Vereinigung mit dem Wolfram, trotzdem eine solche sonst nicht erfolgen würde.

Ein Beispiel für einen Versuch mit Stickstoff ist in Fig. 3 wiedergegeben. Die Röhre enthielt zwei Fäden mit je einem Bügel (von je

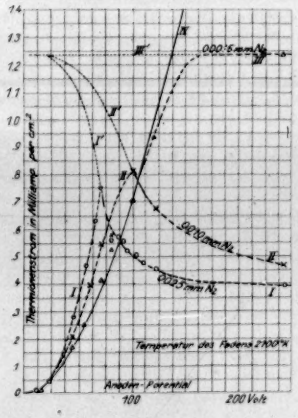


Fig. 3.

etwa 0,3 cm² Oberfläche), von denen der eine als Kathode und der andere als Anode benutzt wurde. Drei Versuche wurden mit einer Tem-

1) Journ. Amer. Chem. Soc. **35**, 105, 1913.

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. **85**, 261, 1914.

peratur des Fadens von 2100° K vorgenommen. Die Kurven I und II wurden mit Stickstoffdrucken von 2,5 μ bzw. 1,0 μ erhalten, während die Kurve III erhalten wurde, nachdem der Druck auf 0,16 μ erniedrigt worden war.

Bei der Vergleichung dieser Kurven mit den Fig. 1 und 2 darf man nicht vergessen, daß die Thermionenstromstärke hier als Funktion des Anodenpotentials gezeichnet ist, und nicht als Funktion der Fadentemperatur. Die beiden Teile der Kurven haben daher ihre Stellung vertauscht. Der scharf ansteigende Teil bei niedrigem Anodenpotential zeigt den durch Raumladung begrenzten Strom, während der horizontale Teil (oder die absteigenden Teile von I und II) die tatsächliche Elektronenemission wiedergeben.

Während des ersten Teiles (Raumladung) besteht die Wirkung des Stickstoffs darin, den Thermionenstrom zu steigern. Dies beruht nicht auf irgendwelcher vermehrten Elektronenemission, sondern einfach darauf, daß durch die Gegenwart positiver Ionen die Wirkung der Raumladung teilweise neutralisiert wird. Bei sehr niedrigen Spannungen hat der Stickstoff anscheinend keine Wirkung, wie dies zu erwarten ist, da keine Ionisierung durch Stoß stattfindet.

Wenn keine Wirkung der Raumladung vorhanden wäre, würde die Stromstärke, selbst bei niedrigem Anodenpotential in einem guten Vakuum durch die Kurve III′ wiedergegeben werden. In Wirklichkeit erreicht sie indessen diesen Sättigungswert erst bei ungefähr 150 Volt.

Bei den Versuchen mit 2,5 μ und 1,0 μ Stickstoff nimmt die Stromstärke nicht zu, wenn das Potential bis auf einen so hohen Wert gesteigert wird, wie bei dem Versuch im Vakuum. In jedem Falle erreicht sie ein scharfes Maximum und nimmt bei weiterer Steigerung des Potentials rasch ab. Das ist ein Zeichen dafür, daß die wirkliche Elektronenemission durch höhere Anodenpotentiale verringert wird. Die Kurven I′ und II′ sind hypothetische Kurven und zeigen die wahrscheinliche Änderung der Elektronenemission in Stickstoff bei niedrigen Anodenpotentialen. In allen drei Kurven unterliegt also die Stromstärke zwei Beschränkungen: durch die Raumladung und durch die Elektronenemission. Im Vakuum ändert sich die durch Raumladung begrenzte Stromstärke mit der $^3/_2$ten Potenz des Anodenpotentials, während die durch Elektronenemission begrenzte vom Potential unabhängig ist. In Stickstoff indessen nimmt der Raumladungsstrom rascher zu als mit der $^3/_2$-Potenz der Spannung, und die Elektronenemission ist nicht konstant, sondern nimmt ab, wenn das Anodenpotential gesteigert wird.

Argon.

Dieses Gas ist besonders wirksam in dem Sinne, daß es die Raumladung verringert, so daß man bei niedrigen Potentialen hohe Stromstärken erhalten kann. Es scheint indessen keinen Einfluß auf die Elektronenemission zu haben. Bei Argondrucken von mehreren Mikron (in einigen Fällen bis zu 100 μ) sind die erhaltenen Sättigungsstromstärken mit den in einem sehr guten Vakuum erhaltenen praktisch identisch. Dies gilt für gewöhnlich selbst dann, wenn eine von einem deutlichen blauen Glimmlicht begleitete starke Ionisierung durch Stoß vorhanden ist. Unter solchen Bedingungen zerfällt indessen die Kathode sehr rasch infolge des Bombardements seitens positiver Ionen. Die Ergebnisse lehren, daß die normale Elektronenemission durch positive Ionisierung, wenn überhaupt, nur wenig beeinflußt wird und von einem Kathodenzerfall völlig unabhängig ist. Bei höheren Stromdichten kann die Kathode stellenweise durch das positive Ionenbombardement erhitzt werden, und genaue Messungen können dann unmöglich werden.

Bei Anwesenheit von 1 oder 2 μ Argon haben beträchtliche Zusätze von Stickstoff oder Sauerstoff nur einen sehr geringen Einfluß auf die Elektronenemission. Das beruht wahrscheinlich auf der schnellen Beseitigung der Oberflächenschichten durch den Kathodenzerfall, obwohl der Einfluß des zerstäubten Wolframs, der darin besteht, den Stickstoff oder den Sauerstoff zu beseitigen, ehe er mit dem Faden in Berührung kommen kann, die Wirkung ebenfalls vergrößern würde.

Das aus dem Faden in Argon zerstäubte Wolfram ist stark negativ geladen und sammelt sich an der Anode oder an dem unmittelbar hinter dieser befindlichen Glas an.

Quecksilberdampf.

In hinreichend reinem Quecksilberdampf erhält man im wesentlichen dieselbe Elektronenemission wie im besten Vakuum, häufig sogar bei Drucken von 100 μ und darüber und bei Potentialen von 200 Volt. Die Thermionenströme können mehrere Zehntelampere und darüber stark sein, allerdings können unter derartigen Verhältnissen quantitative Messungen unzuverlässig sein, weil die Thermionenstromstärke ein großer Bruchteil jener Stromstärke ist, die gebraucht wird, um die Kathode so weit zu erhitzen, daß sie eine ungleichmäßige Temperatur erhält. Bei höheren Drucken und hohen Stromstärken kann unter gewissen Bedingungen die Entladung in einen Lichtbogen übergehen, und dann erfolgt eine stellenweise Erwärmung

der Kathode. Bei niedrigen Drucken des Quecksilberdampfes ist der Zerfall der Kathode infolge positiven Ionenbombardements für gewöhnlich stark ausgeprägt, zumal bei höheren Spannungen.

Selbst unter sehr niedrigen Drucken (0,1 μ und darunter) hat Quecksilberdampf eine sehr ausgeprägte Wirkung insofern, als er die Raumladungswirkungen verringert.

Wasserstoff.

Dieses Gas scheint, wenn es wasserfrei ist, wenig oder gar keine Wirkung auf die Elektronenemission seitens des Wolframs zu haben. Es bedarf eines größeren Druckes an Wasserstoff als an anderen Gasen, um die Raumladungswirkungen merklich zu vermindern.

Verzögerungseffekte.

Bei den meisten Versuchen mit Gasen ließen sich die von den Gasen hervorgerufenen Wirkungen reproduzieren und waren konstant, so lange der Gasdruck konstant war. Daß die Vorgeschichte des Fadens keinen sichtbaren Einfluß hatte, wurde durch häufige Vertauschung des Anoden- und des Kathodenfadens dargetan. Eine solche Vertauschung verursachte keine Änderung in der Thermionenstromstärke, selbst dann nicht, wenn einer der Fäden eine durchaus andere Behandlung erfahren hatte als der andere. Auf diese Weise ergab sich, daß die Mengen der in dem Kathodenfaden enthaltenen oder von ihm absorbierten Gase in den meisten Fällen zu vernachlässigen waren, soweit irgendeine Einwirkung auf die Elektronenemission in Frage kam.

Unter gewissen Bedingungen wurden indessen Verzögerungseffekte beobachtet, insbesondere bei Anwesenheit von Gasen unter äußerst niedrigen Drucken, wie sie etwa von einer Anode abgegeben werden, die nicht richtig gasfrei gemacht worden ist. Diese Effekte liefern den schlagendsten Beweis für die Richtigkeit der Theorie, daß gewisse Gase Oberflächenhäute hervorbringen und dadurch die Elektronenemission verringern. Einige der beobachteten Verzögerungseffekte waren folgende:

1. Nach Steigerung der Fadentemperatur nahm die Elektronenemission mehrere Sekunden oder gar Minuten lang weiter zu, und bei Verminderung der Temperatur trat eine langsame Änderung im entgegengesetzten Sinne ein.

2. Bei plötzlicher Steigerung des Anodenpotentials (oder der Fläche) blieb die Elektronenemission zunächst mehrere Sekunden lang konstant, ging dann allmählich zu einem höheren Werte (oder zuweilen zu einem niedrigeren Werte) über und wurde schließlich konstant. Bei Erniedrigung des Anodenpotentials trat das Entgegengesetzte ein.

3. Ließ ich den Faden sich abkühlen, und blieb dieser selbst lange Zeit hindurch auf Zimmertemperatur, so kehrte nach erneutem Zünden des Fadens die Elektronenemission auf denselben Wert zurück wie vorher. Wenn dagegen während ebenso langer Zeit das Anodenpotential abgeschaltet, der Faden aber heiß erhalten wurde, so war die Elektronenemission bei Wiederanlegung des Anodenpotentials eine ganz andere.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich diese Effekte leicht aus der Annahme erklären lassen, daß eine Schicht bei hohen Temperaturen rascher abzudestillieren strebt als sie gebildet wird, bei niedrigen Temperaturen aber weniger rasch, als sie gebildet wird. Das Anodenpotential beeinflußt die Dicke der Schicht dadurch, daß sie das Bombardement seitens der positiven Ionen verändert, durch das die Schichtdicke entweder erhöht oder verringert werden kann. Wenn diese Änderung der Schichtdicke eine merkliche Zeit erfordert, beobachtet man Verzögerungseffekte.

Allgemeine Bemerkungen über die Wirkungen der Gase.

Gase, die gegen Wolfram chemisch inert sind, beeinflussen die Elektronenemission seitens des Wolframs nicht.

Alle chemisch aktiven Gase verringern die Elektronenemission, und zwar wahrscheinlich durch die Bildung einer Oberflächenschicht. Selbst während der Bildung dieser Schicht verursacht die chemische Reaktion niemals eine merkliche Zunahme der Elektronenemission.

Alle Gase neutralisieren, selbst bei Drucken von weniger als 1 μ, die Raumladung der Elektronen mehr oder weniger vollkommen, und gestatten daher die Messung der Elektronenemission bei höheren Fadentemperaturen, ohne die Verwendung sehr hoher Spannungen erforderlich zu machen.

Eine positive Ionisierung, oder selbst eine leuchtende Glimmentladung bei niedrigen Drucken, erhöht normalerweise den von reinem Wolfram ausgehenden Thermionenstrom nicht über die Stärke des Sättigungsstromes hinaus, den man in einem hohen Vakuum erhält.

Die Gegenwart chemisch aktiver Gase verringert die Elektronenemission seitens des Wolframs bei niedrigen Temperaturen verhältnismäßig viel stärker als bei hohen. Mit anderen Worten: die von diesen Gasen gebildeten Ober-

flächenschichten haben bei hohen Temperaturen das Bestreben, abzudestillieren.

In Gegenwart aktiver Gase folgen die Thermionenströme für gewöhnlich der Richardsonschen Gleichung nicht genau, obwohl sie ihr in einem hohen Vakuum sehr genau folgen.

Elektronenemission seitens anderer Substanzen.

Ich habe viele Versuche mit anderen Materialien angestellt, nämlich mit Tantal, Molybdän, Platin, Kohle und einigen Legierungen. Die Messungen sind einstweilen vorläufiger Art, sie deuten aber darauf hin, daß man bei geeigneten Vorsichtsmaßregeln bei all diesen Substanzen selbst im besten Vakuum verhältnismäßig starke Elektronenemissionen erhält, und daß in jedem einzelnen Falle die Gase entweder keinen Einfluß haben, oder aber die Elektronenemission, wie beim Wolfram, erniedrigen. Genauere Messungen an diesen Substanzen sind im Gange und werden vermutlich veröffentlicht werden.

Allgemeine Schlußfolgerungen.

Die in der vorliegenden Arbeit geschilderten Ergebnisse liefern offenbar den bündigen Beweis dafür, daß die Elektronenemission seitens des Wolframs bei hoher Temperatur in einem hochgradigen Vakuum eine spezifische Eigenschaft des reinen Wolframs ist und kein auf der Gegenwart von Gasen oder von Verunreinigungen in dem Metall beruhender sekundärer Effekt.

Die wahrscheinlichen Gründe dafür, daß es Pring und Parker nicht gelungen ist, in einem guten Vakuum Ströme zu erhalten, habe ich bereits erörtert, und zwar habe ich sie auf Raumladungseffekte und auf die Aufladung der Gefäßwände zurückgeführt. Die ähnlichen Ergebnisse anderer Forscher beruhen bis zu einem gewissen Grade wahrscheinlich auf eben diesen Ursachen, häufig aber auch darauf, daß es nicht gelungen ist, gewisse Gase, besonders Wasserdampf und Kohlenwasserstoffdämpfe, zu beseitigen. Weiter scheint fast allgemein die Meinung bestanden zu haben, daß die niedrigsten Werte der Thermionenströme immer die zuverlässigsten seien, und daß die Gegenwart von Gasen die Ströme immer steigern würde, und zwar sowohl wegen der Elektronenemission infolge chemischer Wirkung, als auch wegen der Ionisierung durch Stoß. Wie man bemerken wird, weisen die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung darauf hin, daß beim Wolfram gegenüber dem starken Einfluß chemisch aktiver Gase im Sinne einer Verringerung der Elektronenemission diese Effekte beide durchaus zu vernachlässigen sind.

Um ein Beispiel anzuführen, hat man allgemein geglaubt, daß die große Abnahme in der Elektronenemission seitens des Platins, die auftritt, wenn man Sauerstoff zuläßt, von der Entfernung des Wasserstoffs herrühre. Die niedrigen Werte, die man dabei erhält, hat man für die normale Elektronenemission seitens des Platins angesehen[1]). Fredenhagen[2]) hat indessen gezeigt, daß der Sauerstoff mehr tut, als daß er einfach den Wasserstoff aus dem Platin entfernt. Fredenhagen folgert daraus, daß keine der bisherigen Messungen der Elektronenemission seitens des Platins etwas anderes geliefert hat als sekundäre Effekte.

Neuerdings hat sich ein ähnlicher Skeptizismus in bezug auf das Vorhandensein eines wahren photoelektrischen Effektes im vollkommenen Vakuum fühlbar gemacht.

Pohl und Pringsheim[3]) werden durch ihre Versuche zu der Ansicht gebracht, daß der normale photoelektrische Effekt bei den Alkalimetallen durch chemische Reaktionen zwischen dem Metall und Gasresten sehr stark erhöht wird. Sie meinen, daß der ganze Effekt vielleicht auf derartigen Ursachen beruhen könne. Fredenhagen[4]) zieht aus seinen Versuchen und aus denen von Küstner[5]) endgültig den Schluß, daß der photoelektrische Effekt am Zink praktisch vollständig verschwindet, wenn die Gase hinreichend beseitigt werden.

Wiedmann und Hallwachs[6]) sind kürzlich zu einem ähnlichen Schlusse hinsichtlich des photoelektrischen Effekts am Kalium gelangt. Sie sagen: „Das Ergebnis dieser Versuche ist, daß die große Lichtelektrizität des Kaliums sich erklärt durch die bedeutende Gasaufnahme dieses Körpers, daß Vorhandensein von Gas eine notwendige Bedingung merklicher Lichtelektrizität ist."

Diese Folgerungen weichen vollständig von den Ergebnissen ab, die Herr Dushman im hiesigen Institut für den photoelektrischen Effekt am Kalium erhalten hat. Herr Dushman findet, daß bei wiederholtem Destillieren in einem sehr hochgradigen Vakuum (Gaedesche Molekularpumpe) der photoelektrische Effekt bestehen bleibt und sogar bei Annäherung an ein vollkommenes Vakuum (Drucke von weniger als 0,001 μ) noch zunimmt. Die Anwesenheit chemisch aktiver Gase setzt die Elektronenemission herab. Herr Dushman wird seine Ergebnisse bald veröffentlichen.

1) H. A. Wilson, Phil. Trans. **202**, 243, 1903.
2) Leipz. Ber. **65**, 42. 1913.
3) Diese Zeitschr. **14**, 1112, 1913.
4) Diese Zeitschr. **15**, 65, 1914.
5) Diese Zeitschr. **15**, 68, 1914.
6) Ber. d. D. Phys. Ges. **16**, 107, 1914.

Ich selbst habe einige ähnliche Beobachtungen beim photoelektrischen Effekt an reinem Wolfram (im Vakuum destilliert) gemacht. Ich bin daher fest überzeugt, daß dieselben Faktoren, welche den Thermioneneffekt beeinflussen, auch den photoelektrischen Effekt bestimmen, und ich glaube, daß man die „sekundären Effekte" als die Ursache der erwähnten, abnorm niedrigen Ergebnisse ansehen muß und nicht als die Ursache des photoelektrischen Effektes selbst.

Die Hauptschwierigkeit, die sowohl bei den Versuchen von Küstner als auch bei denen von Wiedmann und Hallwachs anscheinend übersehen worden ist, liegt in der nur bei äußerst niedrigen Temperaturen zutage tretenden Neigung der Glasoberflächen in der Nähe des bestrahlten Metalls, durch die emittierten Elektronen negativ geladen zu werden. Diese Effekte gewinnen eine große Bedeutung bei so niedrigen Drucken, daß die mittlere freie Weglänge der Elektronen größer wird als die Entfernung von der Kathode zur Oberfläche des Glases. Diese Aufladung von Glasflächen wird häufig durch elektrische Schwingungen verursacht, wie solche durch eine Funkenentladung hervorgerufen werden, und eine einmal aufgetretene Ladung kann lange Zeit hindurch bestehen bleiben. Bei den Versuchen von Küstner wurde eine Glimmentladung zur Beseitigung von Gasen benutzt, und bei denen von Wiedmann und Hallwachs diente eine Hochspannungsentladung zur Schätzung des Entluftungsgrades.

In einem äußerst hohen Vakuum werden die Glasoberflächen auf mindestens 1—2 Volt (und oft noch viel höher) negativ gegen die Kathode aufgeladen. Eine Anode von der geringen Größe und dem niedrigen Potential, wie Wiedmann und Hallwachs sie benutzt haben, würde nach meiner Erfahrung nicht ausreichen, um das entgegenwirkende Feld, das durch die größere Glasoberfläche erzeugt wird, aufzuheben.

Zusammenfassung.

1. Es wird theoretisch und experimentell gezeigt, daß die gegenseitige Abstoßung der Elektronen (Raumladung) in einem von positiven Ionen freien Raume die Stärke des von einer heißen Kathode zu einer kalten Anode fließenden Stromes begrenzt. Für parallele ebene Elektroden von unendlicher Ausdehnung, die um die Strecke x voneinander getrennt sind, und zwischen denen eine Potentialdifferenz V besteht, ist die maximale Stromstärke (per Flächeneinheit), die fließen kann, wenn keine positiven Ionen zugegen sind,

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\cdot\frac{V^{3/2}}{x^2}.$$

Für den analogen Fall eines unendlich langen heißen Drahtes, der konzentrisch im Innern einer zylindrischen Anode vom Halbmesser r angeordnet ist, ist die maximale Stromstärke per Längeneinheit

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{V^{3/2}}{r\,\beta^2},$$

wo β sich, je nach dem Halbmesser des Drahtes, zwischen 0 und 1 bewegt, aber für alle Drähte, deren Durchmesser kleiner als $^1/_{20}$ des Durchmessers der Anode ist, außerordentlich nahe an 1 liegt.

2. Bei Anwesenheit von Gas auf Drucken von mehr als 1 μ, und bei Spannungen von mehr als 40 Volt findet für gewöhnlich eine ausreichende Erzeugung positiver Ionen statt, um die Raumladung stark zu vermindern und somit das Fließen eines stärkeren Stromes zu ermöglichen, als die vorstehenden Gleichungen angeben.

3. Es wird gezeigt, daß, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Ansicht, die allgemeine Wirkung sehr niedriger Gasdrucke darin besteht, die Elektronenemission seitens eines glühenden Metalls herabzusetzen.

4. Diese Wirkung ist bei tiefen Temperaturen besonders stark ausgeprägt. In den meisten Fällen verschwindet sie wahrscheinlich bei sehr hohen Temperaturen.

5. Die Konstante b der Richardsonschen Gleichung

$$i = a\sqrt{T}\cdot e^{-b/T}$$

wird beim Wolfram stets erhöht und die Elektronenemission stets erniedrigt, wenn Sauerstoff, Stickstoff, Wasserdampf, Kohlenoxyd oder Kohlendioxyd zugeführt wird. Argon, Quecksilberdampf und Wasserstoff haben dagegen bei keiner Temperatur einen Einfluß auf die Elektronenemission.

6. Der normale Thermionenstrom aus dem Wolfram in einem „vollkommenen" Vakuum folgt der Richardsonschen Gleichung genau. Die Konstanten sind annähernd:

$$a = 23{,}6 \times 10^6,$$
$$b = 52\,500.$$

Das entspricht einer Stromstärke von 0,0042 Ampere per cm² bei 2000° K.

7. Die Wirkung des Stickstoffs, den Thermionenstrom aus dem Wolfram zu verringern, hängt vom Anodenpotential ab. In vielen Fällen erhält man mit 240 Volt einen schwächeren Strom als mit 120 Volt. Beim Sauerstoff scheint die Wirkung vom Anodenpotential unabhängig zu sein.

8. Die nachstehende Theorie scheint die meisten der beobachteten Erscheinungen zu erklären und steht anscheinend mit keiner in Widerspruch:

Die Wirkung von Gasen, die Sättigungsstromstärke zu ändern, beruht auf der Bildung unbeständiger Verbindungen an der Oberfläche des Drahtes. In den beobachteten Fällen setzt das Vorhandensein der Verbindung die Elektronenemission herab. In welcher Ausdehnung die Oberfläche von der Verbindung bedeckt wird, hängt davon ab, wie schnell sich die Verbindung bildet, und wie schnell sie von der Oberfläche beseitigt wird. Die Verbindung kann auf der Oberfläche direkt durch Reaktion mit dem Gase (beispielsweise mit Sauerstoff) gebildet werden, oder dadurch, daß das Metall hauptsächlich mit positiven Ionen reagiert, die auf die Oberfläche auftreffen (Stickstoff). Die Verbindung kann von der Oberfläche durch Zersetzung, durch Verdampfung oder durch Kathodenzerstäubung (d. h. durch Austreibung infolge des Bombardements seitens positiver Ionen) beseitigt werden.

9. Es werden die Versuchsbedingungen erörtert, die vorhanden sein müssen, wenn es gilt, die Thermionenströme im hohen Vakuum möglichst leicht zu untersuchen. Es wird gezeigt, daß die Ursache dafür, daß andere Forscher gefunden haben, daß die Thermionenströme mit zunehmender Reinheit der Kathode und fortschreitender Verbesserung des Vakuums abzunehmen streben, wahrscheinlich darin zu suchen ist, daß sie diese Bedingungen nicht beobachtet haben.

10. Es wird der Schluß gezogen, daß bei geeigneten Vorsichtsmaßregeln die Elektronenemission seitens eines glühenden, festen Körpers in einem sehr hochgradigen Vakuum (bei Drucken von weniger als 10^{-6} cm) eine wichtige spezifische Eigenschaft der Substanz ist und nicht auf sekundären Ursachen beruht.

Zum Schlusse möchte ich den Herren S. P. Sweetser und William Rogers, welche die experimentelle Seite dieser Untersuchung zum größten Teil ausgeführt haben, für ihre wertvolle Hilfe meinen herzlichen Dank aussprechen.

Forschungslaboratorium der General Electric Company, Schenectady, N. Y.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 20. April 1914.)

Die Wirkung der Raumladung auf Thermionenströme im hohen Vakuum.

(Zu dem gleichnamigen Aufsatz von I. Langmuir.)

Von W. Schottky.

In einem kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz[1]) bemerkt I. Langmuir: „Die Theorie der Elektronenleitung in einem von allen positiven Ladungen oder Gasmolekülen leeren Raume scheint auffallend vernachlässigt worden zu sein". Wenn darin ein gewisser Vorwurf für die Theoretiker liegt, so trifft er doch nicht in dem Maße zu, wie Langmuir nach der vorhandenen Literatur annehmen mußte. Schon im Sommer 1912 war ich bei der Reproduktion lichtelektrischer Versuche auf Potentialschwellen, die sich durch die übergehenden Ladungen ausbilden können, aufmerksam geworden und hatte die Langmuirschen Hauptgleichungen (7) und (20) — letztere durch direkte Integration von (11) unter Einsetzung der angenäherten Anfangsbedingungen $V = 0$, $\frac{dV}{dr} = \infty$ für $r = 0$ — abgeleitet. Ich dachte zunächst daran, diese Gleichungen zu einer Bestimmung von $\frac{e}{m}$ zu verwenden, weshalb ich sie Ende Oktober 1912 in der Form

$$\frac{e}{m} = \text{const} \cdot \frac{i^2 l^4}{V^3} \qquad (7')$$

(l Plattenabstand) und

$$\frac{e}{m} = \text{const} \cdot \frac{i^2 r^2}{V^3} \qquad (20')$$

(r Radius des Auffangzylinders)

dem Direktor des Physikalischen Instituts in Jena, wo ich damals arbeitete, vorgelegt habe. Die experimentelle Prüfung der Gleichung (20), bei der allmählich die Bestimmung von $\frac{e}{m}$ in den Hintergrund trat und die Aufnahme der vollständigen Stromspannungskurve — auch bei verzögernden Potentialen — bei konstanter Glühtemperatur des emittierenden Drahtes zur Hauptaufgabe wurde, zog sich durch das Jahr 1913, die exaktere Rechnung für die verschiedenen Gebiete bis jetzt hin, so daß mir Langmuir mit der Veröffentlichung der Annäherungsgleichungen für beschleunigende Potentiale zuvorgekommen ist.

Doch stellt sich heraus, daß bei der gleichzeitigen Behandlung des Raumladungsproblems von amerikanischer und deutscher Seite von

1) Diese Zeitschr. 15, 348—353, 1914; ausführlicher: Phys. Rev. (2) 2, 450, 1913.

selbst eine ganz gute Arbeitsteilung eingetreten ist. Während Langmuir mit Hilfe eines großen Speziallaboratoriums und experimenteller Mitarbeiter die Prüfung der Drahtzylinder-Stromspannungskurve bei vorzüglichen Vakuumanordnungen bis zu den höchsten Strömen und Potentialen, wo die theoretischen Bedingungen für Gl. (20) sehr genau erfüllt sind, durchführen konnte, war ich im wesentlichen auf Messungen unterhalb des Ionisierungspotentials des Wasserstoffs, den ich als Restgas verwendete, angewiesen; da in diesem Gebiet die Anfangsgeschwindigkeiten noch eine verhältnismäßig große Rolle spielen, wurde ich von selbst dazu geführt, nach einer theoretischen Berücksichtigung der Anfangsgeschwindigkeiten zu suchen und auch den Übergang in jenes Gebiet der (verzögernden) Potentiale, wo nur die Anfangsgeschwindigkeiten maßgebend sind, zu verfolgen.

In einer demnächst in den Annalen der Physik erscheinenden Arbeit stelle ich im Gebiet stärkerer verzögernder Potentiale für den Strom vom Glühdraht zum Zylinder die der Richardsonschen Aufladungsgleichung für die Ebene, $i = e^{-\frac{e}{kT}V}$, entsprechende Beziehung auf, gebe an, in welchem Potentialgebiet diese Beziehung infolge des Auftretens von Potentialschwellen aufhört, gültig zu sein, und zeige, daß das Experiment für Kohle und Wolfram beide Beziehungen recht gut bestätigt.

In einer weiteren Veröffentlichung werde ich sodann für ebene Anordnungen eine genaue Berechnung des Potentialverlaufs zwischen den Elektroden und eine Formel für die Stromspannungskurve bei beliebigen beschleunigenden oder verzögernden Potentialen aufstellen, unter der Annahme, daß die Teilchen und Maxwellschen Geschwindigkeiten austreten und unter Berücksichtigung auch der durch die umkehrenden Ionen verursachten Raumladung. Auch der Fall des thermischen Gleichgewichts zwischen zwei emittierenden Elektroden wird dort mit denselben Ansätzen wie für den stationären Strom behandelt werden. — An Stelle der Child-Langmuirschen Beziehung (7)

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{V^{3/2}}{l^2}$$

für den höchsten Strom, der bei dem Potential V zwischen zwei Platten vom Abstand l fließen kann, setze ich die genauere Beziehung

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\left(\frac{kT}{\pi e}\right)^{3/2}(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+2)^2(l-d)^2,$$

wobei

$$n = 1 + \pi \cdot \log\text{nat}\,\frac{s}{i} + \frac{\pi e}{kT}V$$

gesetzt ist (s Sättigungsstrom) und d die Entfernung der Ebene des auftretenden Potentialminimums von der emittierenden Platte bedeutet, die mit großer Genauigkeit durch die Gleichung bestimmt wird:

$$d = \frac{\sqrt{\frac{m}{e}}\sqrt{\frac{1}{i}}\cdot\left(2\frac{kT}{\pi m}\right)^{3/4}}{3-\frac{s}{i}\sqrt{1+\pi\log\text{nat}\,\frac{s}{i}}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{s}{i}-1}.$$

Für Elektronen folgt aus diesen Formeln, daß bei Plattenabständen von wenigen Millimetern selbst bei größeren beschleunigenden Potentialen der wirkliche Strom beträchtlich größer sein kann als der aus (7) berechnete. In einem vollständig durchgerechneten Beispiel für Wolfram, in dem $T = 2200$, $s = 10^{-2}$ Amp., $l = 0{,}2$ cm gesetzt ist — es wird hier die Sättigung etwa bei 29 Volt erreicht —, finde ich das zu irgendeinem Strom $i < s$ gehörige Potential V zwischen $V = 5$ und $V = 29$ Volt durchweg fast genau um 2,3 Volt kleiner, als das aus Formel (7) berechnete, was bei gegebenem Potential Stromdifferenzen von 10 bis 40 Proz. entspricht.

Wie weit bei zylindrischer Anordnung und beschleunigenden Potentialen meine experimentellen Ergebnisse neben den Resultaten der Amerikaner Geltung haben werden, vermag ich nach den bis jetzt von Langmuir gemachten Angaben nicht zu beurteilen. Wenn, wie es den Anschein hat, die dortigen Forscher sich auch experimentell auf hohe Potentiale beschränkt haben, so werden meine Messungen, die mit unterbrochenem Heizstrom angestellt wurden und wegen der dadurch ermöglichten genauen Potentialbestimmung besonders für schwache Potentialdifferenzen geeignet waren, voraussichtlich — ganz abgesehen von Prioritätsfragen — einige Beachtung beanspruchen können. Die von mir erhaltenen Kurven — untersucht wurden Wolfram-, Tantal- und Kohledrähte in Zylindern von 9 bis 28 mm Durchmesser mit Sättigungsströmen bis $2 \cdot 10^{-3}$ Amp. per cm Glühdraht — zeigen, entsprechend dem bei ebener Anordnung rechnerisch ermittelten Gesetz, bis herab zu etwa 3 Volt gegenüber der nach der Näherungsformel (20) gezeichneten Kurve nur eine gleichmäßige Verschiebung nach niedrigeren Potentialen; die Verschiebung ist, wie zu erwarten, kleiner als bei dem für die Ebene berechneten Beispiel, da die Elektrodenentfernungen größer sind und überhaupt bei zylindrischer Anordnung die Anfangsgeschwindigkeit eine geringere Rolle spielt als in der Ebene.

Was die exaktere Berechnung der Stromspannungskurve bei zylindrischer Anordnung und

beschleunigenden Potentialen betrifft, so haben ja bereits Langmuir und Adams in einer scharfsinnigen Analyse nachgewiesen, daß der Ersatz des Anfangsgradienten o und der Anfangsgeschwindigkeit o durch Gradienten und Geschwindigkeiten, wie sie der Lösung (20) für $r = a$ entsprechen, bei genügend großen Radienverhältnissen keine merkliche Änderung der Beziehung zwischen Strom und Spannung hervorruft; ähnliches wird man herab bis zu etwa 5 Volt von dem Einfluß der in Wirklichkeit vorhandenen thermischen Anfangsgeschwindigkeiten behaupten können. Eine Korrektur wird aber notwendigerweise angebracht werden müssen: dadurch, daß sich direkt vor dem Glühdraht ein Potentialminimum ausbildet, dessen Tiefe vom Verhältnis des übergehenden Stromes i zum Sättigungsstrom s abhängt, ist das Potential des Glühdrahtes (bei Annahme Maxwellscher Emission) um $\frac{kT}{e} \log \text{nat} \frac{s}{i}$ el.-stat. Einheiten höher, der Potentialunterschied zwischen Zylinder und Glühdraht um eben so viel geringer, als es der Langmuirschen Formel entspricht. Für Ströme, die erst bei 1200 Volt gesättigt sind, müßte bei 30 Volt, der unteren Gültigkeitsgrenze von Formel (20) nach Langmuir, diese Korrektur bereits über 1 Volt betragen; es wäre mir sehr erwünscht, wenn Herr Langmuir seine Beobachtungen noch einmal speziell auf dieses Korrektionsglied hin, das den rein thermischen Charakter der Erscheinungen bestätigen würde, durchsehen wollte[1]).

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die Elektronenströme zwischen beliebig gestalteten Elektroden. Nach Langmuir ändert sich ganz allgemein die maximale Elektronenstromstärke zwischen beliebig gestalteten Elektroden wie $V^{3/2}$. Das ist nach meiner Ansicht nicht zutreffend. Bedingung für die Gültigkeit dieser Beziehung ist vielmehr, daß die Geschwindigkeiten der Teilchen überall senkrecht zu den Potentialflächen, vor allem senkrecht zur Auffangelektrode gerichtet sind, was bei beliebigen Grenzflächen nicht zutrifft. So muß in Gleichung (2) (l. c. S. 352) $i = \varrho \cdot v$, stehen, wobei v, die zu den Äquipotentialflächen senkrechte Komponente der Geschwindigkeit ist; dies ist aber eine andere Größe als die in Gleichung (1)

$$\frac{1}{2} m v^2 = V e$$

auftretende resultierende Geschwindigkeit v. Nach meiner Auffassung gilt das $V^{3/2}$-Gesetz nur für parallele Ebenen, koaxiale Zylinder und konzentrische Kugelflächen.

Steglitz, den 27. April 1914.

(Eingegangen 30. April 1914.)

1) Wenn jetzt wirklich Formel (20) zu einer Bestimmung von $\frac{e}{m}$ verwendet werden sollten — Herr Dushman (Phys. Rev. (2) 3, Februar 1914) hält es für möglich, daß diese Methode genauere Resultate liefert als die bisherigen —, so würde bei aller experimenteller Exaktheit die Nichtberücksichtigung dieses Gliedes Fehler von 2 Proz. und darüber im berechneten Wert von $\frac{e}{m}$ bewirken können.

Experimentaluntersuchungen über die magnetischen Strahlen in verschiedenen Gasen und Gasgemischen. I. (Ricerche sperimentali sui raggi magnetici in diversi gas e miscugli gassosi.)[1])

Von Augusto Righi.

Autoreferat.

Einleitung.

Während der Veröffentlichung meiner verschiedenen Mitteilungen und Arbeiten über die magnetischen Strahlen[2]) und hinterher haben sich verschiedene Physiker mit diesem Gegenstande beschäftigt. Unter diesen nenne ich die Herren More und Rieman[3]), die zwar jene meiner Versuche bestätigt finden, die sie wiederholt haben, und größtenteils meine Hypothesen annehmen, aber abweichende Effekte erhielten, als sie die Luft durch andere Gase ersetzten.

In einer kurzen Erwiderung[4]) habe ich ernstliche Zweifel an der Tragweite der Ergebnisse dieser Physiker geäußert, habe mir indessen vorbehalten, auch meinerseits die Versuche mit verschiedenen Gasen zu wiederholen, sobald ich die Untersuchungen beendet haben würde, mit denen ich damals gerade beschäftigt war.

Dies habe ich nun endlich ausführen können, und so lege ich denn in der vorliegenden Mitteilung meine Ergebnisse dar, aus denen hervorgeht, daß jene von mir gehegten Zweifel begründet waren. Auf diese Ergebnisse habe ich an anderer Stelle[5]) bereits kurz hingewiesen und dort auch eine neue Mitteilung von More und Mauchly[6]) besprochen.

Erster Teil.

Der Versuch der virtuellen Anode.

1. Versuchsanordnung.

Jenen unter meinen Versuchen, den die ge-

1) Mem. R. Acc. Bologna, 16. Nov. 1913.
2) Eine Zusammenfassung der hauptsächlichen unter diesen Veröffentlichungen findet sich in dieser Zeitschr. 11, 158, 1910.
3) Phil. Mag., Aug. 1912.
4) Phil. Mag., Nov. 1912.
5) Phil. Mag., Nov. 1913.
6) Phil. Mag., Aug. 1913.

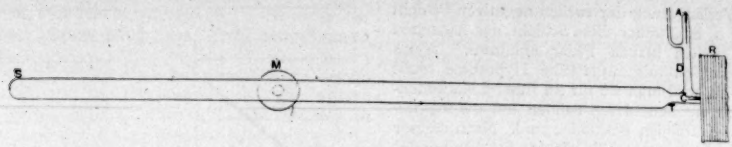


Fig. 1.

nannten Physiker nachgeprüft haben, kann man den „Versuch der virtuellen Anode" nennen. Um ihn in befriedigender Weise auszuführen, bedarf man langer Röhren, in denen die Anode in einem seitlichen Ansatzrohr angeordnet ist. Fig. 1 zeigt im Maßstabe 1 : 12 die Röhre, die ich bei den oben genannten Versuchen benutzt habe, während Fig. 2 (Maßstab ungefähr 1 : 2) die Kathode C und die ihr benachbarten Teile erkennen läßt. In beiden Figuren bezeichnet R eine Spule mit durchbohrtem Kern, die zur Erregung des Magnetfeldes dient; die Stärke dieses Feldes nimmt natürlich von C gegen S hin ab. Um die Feldstärke bei den einzelnen Versuchen anzugeben, habe ich sie in C, also etwa in 23 mm Entfernung von der Spule R, gemessen und sie während der Messungen auf Grund der Ablesungen an einem in den Stromkreis der Spule eingeschalteten Amperemeter ermittelt.

Der Kreis M in Fig. 1 stellt einen beweglichen Elektromagnet dar, der erforderlich ist, um die virtuelle Anode hervortreten zu lassen. Dieser Elektromagnet ist in Fig. 3 im Maßstabe 1 : 6, in der Richtung von C nach S gesehen, dargestellt. Er wird von dem langen Eisenstab $ABCDE$ und den Spulen R, R' gebildet; letztere erzeugen in A und E Pole mit entgegengesetztem Vorzeichen. Der Elektromagnet ist auf einem Schlitten UV befestigt, und dieser läuft auf Schienen, die auf einem langen Tische XY ruhen. Auf diese Weise kann man den Prüfmagnet ACE nacheinander auf alle Teile der langen Röhre T (das ist die Röhre ST aus Fig. 1) wirken lassen und an einem Maßstab die Entfernung zwischen der Kathode und dem Punkte messen, in welchem die Gerade AE die Achse der Röhre T trifft. In diesem Punkte hatte das Magnetfeld, das von dem Prüfelektromagnet erzeugt wurde, und das in bezug auf die Entladungsröhre transversal war, immer eine Stärke von 80 bis 100 Gauß.

Der Entladungsstrom schließlich wurde zuweilen von einer Batterie kleiner Sammler geliefert, häufiger jedoch von einer kräftigen Influenzmaschine. Die Entladungsstromstärke betrug immer ungefähr $^1/_3$ Milliampere.

2. Versuch der virtuellen Anode.

Zum Zwecke der Klarheit und zur Vermeidung jedes etwa möglichen Mißverständnisses halte ich es für notwendig, zunächst daran zu erinnern, worin dieser Versuch besteht, und zwar unter Hinzufügung einiger bisher unveröffentlichter Einzelheiten.

Während man bei Abwesenheit des Magnetfeldes in der Röhre DCT (Fig. 1) die gewohnte Leuchterscheinung, nämlich die, häufig geschichtete, positive Säule im Zweige D und die beiden negativen Schichten bei C, sieht, verschiebt sich nicht nur, wenn mittels der Spule R ein Feld von passender Stärke erzeugt wird, die positive Säule in D und drückt sich sozusagen an die Wand, sondern man bemerkt auch eine beträcht-

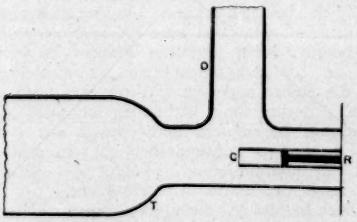


Fig. 2.

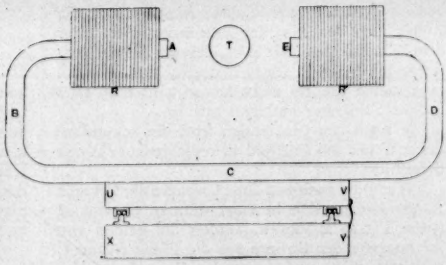


Fig. 3.

liche Verlängerung der zweiten negativen Schicht gegen S hin, wobei diese Schicht das Aussehen einer breiten blauen Feder annimmt. Wenn man die von mir aufgestellte Hypothese nicht annimmt, wird man sie für ein Bündel Kathodenstrahlen ansehen, deren Bahnen um die magnetischen Kraftlinien gewunden sind. Nach meiner Theorie bewegen sich in diesem Strahlenbündel außer den in dieser Weise beweglichen freien Elektronen neutrale Systeme, deren jedes aus einem positiven Ion und einem Elektron als dessen Trabanten besteht.

In diesem Falle wird jenes Bündel ein Bündel magnetischer Strahlen sein, wenn man, wie es mir angebracht erscheinen will, diese Bezeichnung ausschließlich anwendet, um anzugeben, daß sich außer freien Elektronen auch diese neutralen Paare oder, wie wir sie nennen wollen, Doppelsterne bewegen.

Diese Doppelsterne sind notgedrungen sehr unbeständig, obgleich das Magnetfeld jene unter ihnen beständiger macht, in denen das Elektron in einem bestimmten Sinne kreist. Jedenfalls zerfallen sie bald infolge der Zusammenstöße, und es bilden sich wieder neue; die Anzahl der jeweils vorhandenen aber wird sicherlich in der Richtung von C nach S hin abnehmen, weil die Stärke des Magnetfeldes abnimmt, das sie zu erzeugen und zu erhalten strebt.

Steigert man die Magnetisierungsstromstärke, so verlängert sich das blaue Strahlenbündel bis zu einem Maximum, und gleichzeitig erscheint in seiner Verlängerung eine rote Lichtsäule, die ich die sekundäre Säule nennen will; sie hat das Aussehen der positiven Säule. Läßt man nun das transversale Prüffeld mitwirken, das von dem Elektromagnet M erzeugt wird, so deformiert sich die sekundäre Säule in der Art, daß man begreift, daß sich ein gewisses Gebiet der Röhre so verhält, als ob dort eine Anode (virtuelle Anode) vorhanden wäre, von der zwei Entladungsströme ausgehen, und zwar der eine nach C hin, der andere nach S hin. Nach meiner Hypothese würde diese Anode durch die Anhäufung der aus der Zerstörung der unter dem Einfluß des Feldes gebildeten Paare entstehenden positiven Ionen herbeigeführt. Nimmt man meine Theorie nicht an, so wird man eine andere Erklärung ersinnen müssen.

Je nach den Umständen wird die sekundäre Säule durch das Prüffeld in verschiedener Weise deformiert.

Wenn die positiven Ionen, welche die virtuelle Anode bilden, sich in einer dünnen Schicht A (siehe Fig. 4) anhäufen, werden die beiden von ihr ausgehenden Ströme wie die Pfeile B und C gerichtet sein, und unter der Einwirkung des Prüfelektromagnets werden sie eine gekrümmte

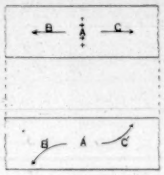


Fig. 4.

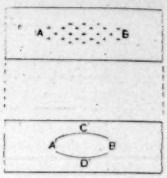


Fig. 5.

Gestalt annehmen, beispielsweise wie B' und C'. Verschiebt man M (Fig. 1) von T gegen S zu, so wird man sehen, wie sich die sekundäre Säule zunächst wie C' (Fig. 4), dann weiterhin wie B' biegt, während bei einer bestimmten Mittelstellung, und zwar gegenüber dem Gebiete A, die sekundäre Säule die Gestalt eines S annehmen wird. Dieser Umstand gestattet uns, zu erkennen, welchen Platz die virtuelle Anode annimmt, und ihre Entfernung von der Kathode anzugeben.

In anderen Fällen dagegen kommt es vor, daß die sekundäre Säule durch den Prüfelektromagnet verdoppelt wird. Diese Erscheinung zeigt an, daß die virtuelle Anode ein mehr oder minder ausgedehntes Gebiet AB (siehe Fig. 5) einnimmt. Tatsächlich sind auf der Strecke AB der sekundären Säule zwei entgegengesetzt gerichtete Ströme nebeneinander vorhanden, und das Prüffeld wird sie in entgegengesetztem Sinne, nämlich wie $A'C'B'$ und $A'D'B'$, biegen. Links von A' und rechts von B' wird man keine Verdoppelung beobachten, sondern nur eine Krümmung der Lichtsäule. Man wird als den Ort, den die virtuelle Anode einnimmt, das Gebiet der Röhre annehmen können, das zwischen den Polen des beweglichen Elektromagnets liegt, wenn dieser bei der Verschiebung parallel zur Röhre in der Stellung angelangt ist, daß er die sekundäre Säule in zwei Zweige zerlegt, welche merklich gleiche Intensität aufweisen.

3. Fehlerquellen.

Gleich bei den ersten Veröffentlichungen über diesen Gegenstand habe ich die Notwendigkeit betont, jeden kleinsten Funken in freier Luft im Entladungsstromkreise zu vermeiden, dem die Röhre angehört. Wenn eine noch so kleine Unterbrechung vorhanden ist, wird die Entladung, die anfangs kontinuierlich war, oder doch wenigstens kontinuierlich zu sein schien, nicht nur intermittierend, sondern sie erglänzt auch längs der Röhre in rotem Licht.

Diese Lichtsäule, die bis zu einem gewissen Punkte die sekundäre Säule vortäuscht, die von der virtuellen Anode herrührt, läßt sich

deutlich von jener unterscheiden, die man bei richtiger Anwendung des Prüfelektromagnets erhält.

Die sekundäre Säule weist nämlich die bereits beschriebenen Gestaltsänderungen auf, welche das Vorhandensein einer virtuellen Anode in einem von der Kathode mehr oder minder weit entfernten Gebiete erkennen lassen. Nur gelegentlich, und zwar dann, wenn das Hauptmagnetfeld schwach ist, wird die virtuelle Anode in geringer Entfernung von der Kathode auftreten, und die rote Lichtsäule wird sich unter der Einwirkung des Transversalfeldes auf ihrer ganzen Länge so krümmen, daß sie das Vorhandensein eines von T nach S gerichteten Stromes zu erkennen gibt. Die infolge des Vorhandenseins eines kleinen Funkens entstandene Lichtsäule hingegen krümmt sich immer in der zuletzt geschilderten Weise. Außerdem zeigt sie noch andere entscheidende Merkmale, beispielsweise dieses, daß sie sich unter dem Einfluß des Prüffeldes gegen die Wand hin drängt und den ganzen Querschnitt der Röhre frei oder nahezu frei läßt, was bei der sekundären Säule nicht vorkommt.

Einige der Versuche, die ich nach den in der Einleitung angeführten angestellt habe[1]), legen eine Erklärung für die Lichtsäule nahe, die die Röhre erfüllt, wenn eine von einem kleinen Funken überbrückte Unterbrechung im Stromkreise vorhanden ist. Ich habe nämlich gezeigt, daß die Funken, oder die explosiven Entladungen in einem verdünnten Gase allgemein, Elektronen und positive Ionen weit fortschleudern. Erstere sind mit größerer Geschwindigkeit ausgestattet und gelangen ziemlich weit, ja fast immer bis zum Grunde der Röhre; letztere machen in geringer Entfernung von der Stelle Halt, von der sie ausgegangen sind. Die Wiedervereinigung dieser Elektronen und positiven Ionen nun, die in den zwischen zwei aufeinanderfolgenden Funken verlaufenden Zeiträumen erfolgt, erzeugt die Lichtsäule in der langen Röhre.

Bereits zu Anfang meiner Untersuchungen habe ich weiter festgestellt, daß man bei Verwendung der Entladungen eines Induktors an Stelle des Gleichstromes der Influenzmaschine oder der Sammlerbatterie Wirkungen derselben Art erhält, wie sie auftreten, wenn, ebenfalls bei Verwendung der genannten Stromquellen, in dem Stromkreise ein kleiner Funken vorhanden ist. Ich gab infolgedessen sogleich die Verwendung des Induktors auf. Es ist daher keineswegs verwunderlich, daß die beiden oben genannten Physiker, die zunächst gerade Induktorentladungen benutzt haben, getäuscht werden konnten.

Ähnliche störende Wirkungen beobachtet man auch, wenn die Verdünnung zu weit getrieben wird und der gegenseitige Abstand der beiden Elektroden zu groß ist.

1) Diese Zeitschr. 13, 873, 1912.

4. Entladungsröhren verschiedener Gestalt und ihre Wirkungsweise.

Ich habe bisher immer Röhren der beschriebenen Form angewandt, die das Ergebnis sehr zahlreicher Versuche war, ohne gründlich der Ursache ihrer besonderen Wirksamkeit nachzuspüren. Zuletzt wollte ich, und zwar ehe ich zu den neuen Versuchen mit verschiedenen Gasen überging, das Verhalten verschieden geformter Röhren untersuchen.

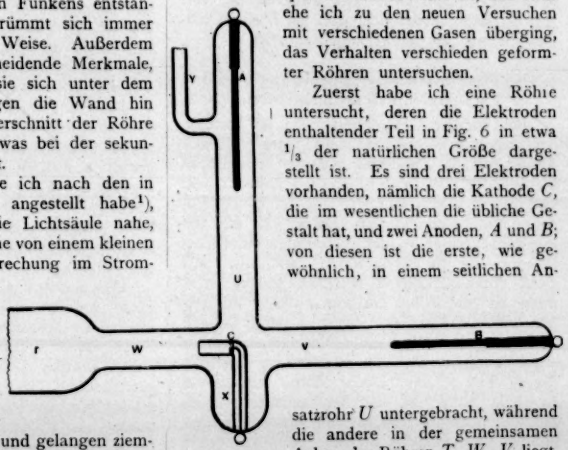


Fig. 6.

Zuerst habe ich eine Röhre untersucht, deren die Elektroden enthaltender Teil in Fig. 6 in etwa $^1/_3$ der natürlichen Größe dargestellt ist. Es sind drei Elektroden vorhanden, nämlich die Kathode C, die im wesentlichen die übliche Gestalt hat, und zwei Anoden, A und B; von diesen ist die erste, wie gewöhnlich, in einem seitlichen Ansatzrohr U untergebracht, während die andere in der gemeinsamen Achse der Röhren T, W, V liegt. Die Röhre T ist so lang wie die in Fig. 1 abgebildete, also etwa anderthalb Meter, und die zur Erregung des Feldes bestimmte Spule ist in der gewohnten Weise so angeordnet, daß die Röhre VB in ihr Inneres hineinragt.

Mit dieser Röhre habe ich folgendes festgestellt: Solange man als Anode die Elektrode A benutzt, erhält man die an anderer Stelle beschriebenen Ergebnisse, von denen auch weiter unten ausführlich die Rede sein wird; wenn man hingegen als Anode die Elektrode B verwendet, fehlt durchaus jede eigentliche Betätigung einer virtuellen Anode. Tatsächlich verlängert sich allerdings auch in diesem Falle das von der Kathode ausgehende blaue Lichtbündel, aber die sekundäre Säule, die das Vorhandensein einer virtuellen Anode anzeigen würde, ent-

steht nicht. Um die virtuelle Anode zu erhalten, muß also das Feld auf die positive Säule in einer zu dieser senkrechten Richtung einwirken.

Eine Röhre von der in Fig. 7 (Maßstab 1:6)

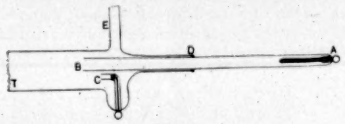


Fig. 7.

angegebenen Gestalt liefert dasselbe negative Ergebnis, einerlei, wie weit man das Ende B des die Anode bei A enthaltenden Rohres AB in T hineinragen läßt. Die Verschiebung von AB ist dadurch möglich, daß bei D eine Dichtung mittels Siegellacks angebracht ist.

5. Die Periodizität der Entladung und das Potential an den Elektroden.

Bei anderer Gelegenheit habe ich gezeigt, daß, wenn man die Erscheinung der virtuellen Anode hat, die Entladung nicht mehr merklich kontinuierlich ist, sondern deutlich periodisch ist, und daß der leise Ton, der von der Röhre ausgeht, die Periode angibt. Später, als ich die Potentialdifferenz an den Elektroden einer Entladungsröhre gemessen hatte, fand ich, daß diese Potentialdifferenz merklich größer wird, wenn auf die Röhre ein transversales Magnetfeld wirkt, daß sie sich dagegen wenig ändert, und zwar im allgemeinen im abnehmenden Sinne, wenn das Feld longitudinal ist. Das mit der in Fig. 6 abgebildeten Röhre gewonnene Ergebnis stellt also das Vorhandensein eines Zusammenhanges zwischen all diesen Erscheinungen fest, nämlich zwischen der Spannungszunahme, der Periodizität und der sekundären Säule.

Ich hatte früher angenommen, daß sich dies alles durch die Wirkung des Feldes auf die Bewegung der von der Kathode ausgehenden Elektronen erklären ließe. Nunmehr wird man offenbar die Wirkung des Feldes auf die positive Säule in Betracht ziehen müssen. Während die Elektronen und die positiven Ionen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen geradlinige Bahnen durchlaufen, müssen sie unter der Einwirkung eines transversal gerichteten Feldes gekrümmte Bahnen verfolgen, und dadurch wird der normale Verlauf der Entladung behindert und diese somit geschwächt, und es entsteht eine Elektrizitätsanhäufung an den Elektroden. Die Periodizität der Entladung ist dann die natürliche Folge der bekannten Tatsache, daß die neuen Ionen, die während einer Entladung entstehen, deren Dauer auch dann verlängern, wenn die Potentialdifferenz einen Wert hat, der kleiner ist als der für den Beginn der Entladung erforderliche.

Daraus folgt ferner, daß, wenn sich wirklich die kleinen Paare bilden, die bei ihrem Zerfall die positiven Ionen freigeben, aus denen sich dann die virtuelle Anode bildet, daß dann der Transport dieser kleinen Paare in den Phasen größter Intensität der Entladung erfolgen muß, während die sekundäre Säule, die aus der Entladung der virtuellen Anode entsteht, während der Phasen der Unterbrechung oder der geringsten Intensität der Hauptentladung bestehen muß.

Wegen einiger Versuche über den Wert der Entladungsperiode, die im übrigen viel Ähnlichkeit mit gewissen anderen Versuchen besitzen, die ich vor zehn Jahren beschrieben habe[1]), verweise ich auf die ausführliche Veröffentlichung. Hier will ich nur auf einen sehr merkwürdigen Versuch aufmerksam machen.

Die Belegungen eines Kondensators mit einer Kapazität von 20000 elektrostatischen Einheiten waren mit den Elektroden der in Fig. 1 dargestellten Entladungsröhre verbunden. Bei Erregung des Feldes wurde die Entladung periodisch, und die Periode betrug ungefähr eine halbe Sekunde, so daß an die Stelle des anfänglich milden und ruhigen Lichtes plötzlich ein periodisches und lebhaftes Flimmern trat.

Die Notwendigkeit eines quer zur positiven Säule gerichteten Magnetfeldes geht klar aus folgendem Versuche hervor, für den der in Fig. 8 im Maßstabe 1:6 dargestellte Apparat gebaut wurde. Dieser Apparat ist dem in Fig. 6 geschilderten ähnlich, nur ist der Abstand zwischen dem seitlichen Ansatzrohr und der Kathode C so groß, daß zwischen den beiden die Spule R aufgestellt werden kann. Dies wird dadurch ermöglicht, daß bei A ein Schliff vorhanden ist.

Wenn man die Elektrode D zur Anode macht, so erhält man die gewohnten Wirkungen. Wenn hingegen die Elektrode B Anode ist, so fehlen diese, genau so, wie es bei der in Fig. 6 dargestellten Röhre der Fall ist. In diesem letzteren Falle aber bringt man die sekundäre Säule in der langen Röhre T dadurch zur Erscheinung, daß man der in der Röhre B vorhandenen positiven Säule eine zweite Spule R' nähert, die ein quer zum Entladungsstrom gerichtetes Feld erzeugt.

Eine letzte Röhre, die in Fig. 9 im Maßstab 1:6 wiedergegeben ist, gestattete mir, zu erkennen, daß die Wirkung eines Transversal-

1) Rend. R. Acc. Bologna, 25. Mai 1902; Le Radium, Jan. 1910.

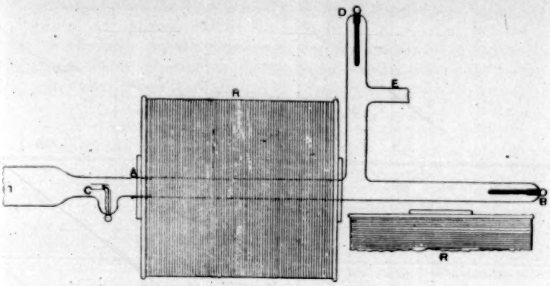


Fig. 8.

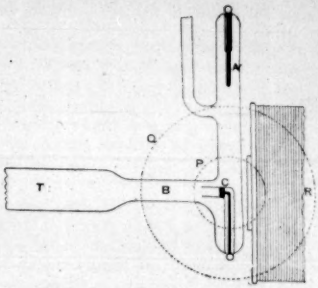


Fig. 9.

feldes auf die Entladung zwar eine notwendige Bedingung für die Entstehung der virtuellen Anode ist, aber keine hinreichende, und daß außerdem erforderlich ist, daß ein Feld in der Längsrichtung der Röhre T wirkt. Die in Fig. 9 abgebildete Röhre kann übrigens immer die in den Fig. 1 und 2 dargestellte ersetzen und bietet dieser gegenüber den Vorteil, daß man bei ihr eine Spule mit undurchbohrtem Kern anwenden kann.

Zu dem Versuche, den ich nunmehr beschreiben will, wird die Spule R auf einen Tisch gesetzt, der um eine mit der Achse der Röhre AC zusammenfallende vertikale Achse drehbar ist. Man kann mithin dadurch, daß man dem Tisch eine Drehung um 90° erteilt, bewirken, daß die Spule in die durch die punktierten Kreise Q und P angedeutete Lage gelangt. Das Magnetfeld bleibt transversal zur Entladung, die ja von A nach C verläuft, behält aber nicht mehr die Richtung CBT bei. Bei dieser Anordnung der Spule bemerkt man nun die Periodizität der Entladung und die Zunahme der Potentialdifferenz an den Elektroden, ebenso, ja in noch ausgeprägterem Maße, wie, als die Spule die Stellung R inne hatte; man stellt aber nicht mehr das Vorhandensein der virtuellen Anode fest. Die Röhre T wird allerdings von einer Lichtsäule erfüllt, die der sekundären Säule ähnelt, aber dieses Licht verhält sich, wenn man es mit dem Prüfelektromagnet untersucht, wie das Licht, das infolge der Anwesenheit einer kleinen Unterbrechungsstelle im Entladungskreise entsteht.

Damit sich die virtuelle Anode bildet, ist mithin ein Magnetfeld von passender Richtung erforderlich, welches die Bildung der Doppelsterne begünstigt und sie zusammen mit den freien Elektronen in der Längsrichtung der großen Röhre leitet.

6. Messung des Abstandes der virtuellen Anode von der Kathode.

Da es sich darum handelte, das Verhalten anderer Gase als Luft zu untersuchen und an ihnen den Versuch mit der virtuellen Anode anzustellen, dachte ich daran, die Lage dieser virtuellen Anode in den verschiedenen Fällen zu bestimmen, um daraus zu ersehen, ob und in welcher Weise diese Lage unter sonst gleichen Bedingungen etwa von der Natur des Gases und somit von der Natur der bewegten positiven Ionen abhängt. Von den übrigen Bedingungen sind der Gasdruck und die Magnetfeldstärke die wichtigsten. In welchem Sinne ihr Einfluß zu erklären ist, geht bereits aus früheren Versuchen hervor. Es handelte sich nunmehr darum, eine quantitative Untersuchung anzustellen und die Entfernung von der Kathode zu messen, in der sich unter verschiedenen Versuchsbedingungen die virtuelle Anode bildet. Ich will in diesem Abschnitt über die Versuche mit Luft berichten, während die Versuche mit anderen Gasen den Gegenstand des zweiten Teiles der vorliegenden Arbeit bilden werden.

Der Genauigkeitsgrad, den man bei diesen Bestimmungen erreichen kann, ist größer, als vorauszusehen war, besonders, nachdem man sich eine gewisse Übung angeeignet hat.

Eine erste Messungsreihe bezieht sich auf den Einfluß der Verdünnung. Mit einem Magnetfelde von 1200 Gauß (das, wie bereits gesagt, auf der Achse der Spule in etwa 23 mm Entfernung von der Spule gemessen wurde), erhielt ich die in Fig. 10 dargestellten Ergebnisse. In dieser Figur sind als Abszissen die Abstände zwischen der Kathode und der virtuellen Anode gewählt und zu Ordinaten die Drucke der Luft. Die durch die experimentell gefundenen Werte gegebenen Punkte sind durch kleine Kreise dargestellt. Wie man sieht, und wie es auch nach

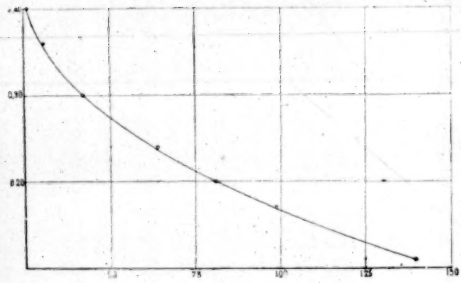


Fig. 10.

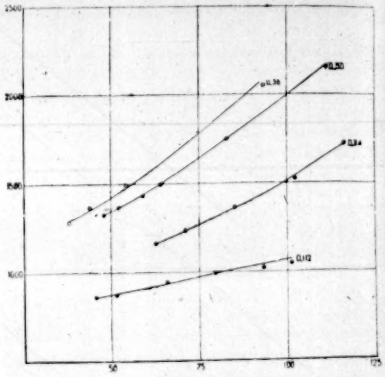


Fig. 11.

der Theorie vorauszusehen ist, hören die Paare Elektron — positives Ion in um so größerer Entfernung von der Kathode auf zu bestehen, je stärker die Luft verdünnt ist, und je seltener daher die Zusammenstöße sind.

Der Einfluß der Feldstärke bei konstantem Druck wird durch verschiedene Messungsreihen veranschaulicht, die sich voneinander hinsichtlich des Druckes der Luft unterscheiden. Auch hier teile ich die Zahlenwerte nicht mit, sondern beschränke mich darauf, ein Diagramm wiederzugeben, das ich in der Weise erhalten habe, daß ich zu Abszissen die Abstände d der virtuellen Anode von der Kathode und zu Ordinaten die Feldstärken M nahm. Es ist somit erwiesen, daß mit wachsender Feldstärke die Bahn der positiven Ionen wächst; das ist auch vorauszusehen, wenn man bedenkt, daß sich dann das Gebiet, in dem die Magnetkraft nicht mehr ausreicht, um die Doppelsterne am Leben zu erhalten, in größerer Entfernung befindet[1]).

1) Hinsichtlich der Herstellung des Diagramms in Fig. 11 und der übrigen Diagramme, die ich im zweiten Teile wiedergeben werde, empfiehlt es sich, zu bemerken, daß ich bei jedem gegebenen Druck die Messung wiederholt und die zugehörige Kurve gezeichnet habe. Diese Kurven hatte ich beim Zeichnen der endgültigen Kurve überall da vor Augen, wo wegen geringer Zahl der Bestimmungen über den Gang der Kurve irgendwelche Unsicherheit bestand.

(Nach dem Manuskript aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 16. April 1914.)

Über die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle[1]).

Von Győző Zemplén.

Die Elektrodynamik bewegter Körper scheint auf Grund des Relativitätsprinzips zu einem glücklichen Abschluß gelangt zu sein. Doch führt sie zu einer neuen Definition der Zeit, die manches Fremdartige enthält, so daß diese Theorie derzeit noch keinen allgemeinen Beifall sich erwerben konnte.

Da die negativen Versuchsresultate, die den Impuls zum Aufbau der Relativitätstheorie erweckten, nicht mit Notwendigkeit zur Relativitätstheorie führen, stellt sich unwillkürlich die Frage, ob es nicht möglich wäre, die Absolutheorie durch neue, weniger allgemeine Hilfshypothesen so zu modifizieren, daß Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment hergestellt wird, ohne die Grundbegriffe der Physik umwälzen zu müssen.

Ich glaube diese Frage bejahen zu können und werde in dem Folgenden zeigen, daß, wenn man das Prinzip der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle fallen läßt und für die Abhängigkeit dieser Größen voneinander eine besondere Hypothese einführt (in allen übrigen Einzelheiten aber an der Lorentzschen Absolutheorie festhält), sämtliche „Erdbewegungsversuche" erklärt werden können.

Da nämlich meine Hypothese sich auf Größen zweiter Ordnung in $\frac{u}{c}$ bezieht (u Geschwindigkeit der Lichtquelle relativ zum Äther, $c = 3 \cdot 10^{10}$

1) Auszug aus einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 9. Dez. 1913 vorgelegten Abhandlung.

cm sec^{-1}), so bleiben alle Resultate erster Ordnung der Absoluttheorie unverändert.

Bis jetzt wurde niemals in der Wellentheorie des Lichtes irgendeine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum von der Geschwindigkeit der Lichtquelle angenommen. Ja es wurde sogar der Versuch gemacht, die Theorie von E. Cohn[1]) damit zu widerlegen, daß die erwähnte Abhängigkeit als eine Folgerung dieser Theorie sich ableiten ließ[2]).

Und doch glaube ich, daß die Annahme einer ähnlichen Abhängigkeit gar nichts Absurdes enthält.

Man stelle sich eine Lichtquelle vor, die aus einem Haufen von materiellen (darunter elektrischen) Teilchen besteht, die in einem kontinuierlich verbreiteten Meere des Äthers schwimmend in Schwingungsbewegung begriffen sind und dadurch im Äther periodische Änderungen hervorrufen, die als elektromagnetische Wellen sich im Raume fortpflanzen.

Ist die Lichtquelle „makroskopisch" in Ruhe, dann werden die erwähnten periodischen Änderungen den benachbarten Ätherteilchen mit einer nach allen Richtungen konstanten Geschwindigkeit übergeben.

Nun soll aber die ganze Lichtquelle eine Translationsbewegung im Äther ausführen: die Materie, die sich durch den Äther Bahn bricht, wird in demselben gewisse Änderungen bewirken, die ganz anderer Natur sind, als die durch die elektromagnetischen Oszillatoren hervorgerufenen Deformationen. Insbesondere besteht ein wesentlicher Unterschied in Richtung der Translationsbewegung des Systems; in so einem, zur Bewegung der Lichtquelle longitudinalen Strahle kommen bloß die dem Strahle transversalen elektromagnetischen Kraftwirkungen als Licht zur Wirkung, denen sich nun eine longitudinale Ätherdeformation überlagert. Ich finde also gar nichts Absurdes in der Annahme, daß eine mit einer longitudinalen Translationsdeformation verbundene transversale, periodische Deformation sich mit anderer Geschwindigkeit fortpflanzen wird als eine rein transversale.

Allerdings wird es kaum möglich sein, den Mechanismus einer solchen Fortpflanzung auf Grund der klassischen Mechanik und Elektrodynamik sich vorzustellen, doch kann ich auf eine — natürlich sehr unvollkommene und gekünstelte — mechanische Analogie hinweisen, welche doch zur Plausibilität meiner Hypothese beitragen kann.

Ein unstetiger Sprung des Druckes und der Geschwindigkeit — ein Verdichtungsstoß — pflanzt sich in einem Gase mit einer Geschwindigkeit fort, die eine Funktion der Größe des Drucksprunges ist[1]). Nun entsteht aber bei der Bewegung eines Atoms im Äther gerade eine Art Verdichtungsstoß, denn die Geschwindigkeit des Äthers erleidet beim Übergang vom freien Äther ins Innere des Atoms einen unstetigen Sprung; die Fortpflanzung eines solchen Sprunges wird nunmehr mit einer von der Größe des Sprunges abhängigen und mit derselben zunehmenden Geschwindigkeit vor sich gehen.

Ich glaube daher, daß meine Annahme nicht ohne weiteres zu verwerfen sei. Ich werde nämlich beweisen, daß dieselbe zur Erklärung der oben erwähnten Paradoxa der Absoluttheorie ausreicht.

1. Der Versuch von Michelson.

Bekanntlich ist nach der Absoluttheorie der Lichtweg zwischen zwei Punkten eines bewegten Systems in der Bewegungsrichtung — hin und zurück gemessen:

$$1 + \frac{u^2}{c_0^2}$$

und senkrecht hierzu:

$$1 + \frac{u^2}{2c_0^2}$$

mal größer als der Weg, den das Licht zwischen denselben Punkten zurücklegen würde, wenn das ganze System in Ruhe wäre; u bedeutet die Geschwindigkeit des Systems relativ zum Äther und c_0 die Lichtgeschwindigkeit bei ruhender Lichtquelle.

Die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen (hin und zurück) zweier gleich langen Strecken braucht, deren eine parallel, die zweite senkrecht zur Translationsbewegung ist, wird in beiden Richtungen gleich sein, wenn wir voraussetzen, daß die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Bewegung (longitudinale Lichtgeschwindigkeit)

$$c_\parallel = c_0\left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2}\right) \qquad (1)$$

ist, wogegen die Lichtgeschwindigkeit senkrecht zur Translationsbewegung (transversale Lichtgeschwindigkeit) unverändert bleibt, also:

$$c_\perp = c_0. \qquad (2)$$

Es sei ϑ der Winkel, den der Strahl mit der Richtung von u einschließt, dann soll

$$c = c_0\left(1 + \frac{(u\cos\vartheta)^2}{2c_0^2}\right) \qquad (3)$$

sein.

1) E. Cohn, Ann. d. Phys. (4) **7**, 29, 1902.
2) W. Wien, Ann. d. Phys. (4) **13**, 643 u. **14**, 633, 1904.

1) Siehe z. B. Enzykl. der math. Wiss. IV, 3, S. 392.

Da die Überfahrtzeit der longitudinalen Strahlen gleich der der transversalen Strahlen ist, so bleiben die Interferenzstreifen bei der Drehung des Systems um eine, auf u senkrechte Achse unverändert.

Bei den tatsächlichen Versuchen erleiden die Strahlen Reflexionen und Brechungen; man überzeugt sich leicht, daß die obigen Annahmen in allen Einzelheiten zur Erklärung der Konstanz der Interferenzstreifen ausreichen, wenn man noch die Gesetze der Spiegelung und der Brechung in geeigneter Weise formuliert. Hierzu genügt es, das Huygenssche Prinzip unserer Grundannahme entsprechend konsequent anzuwenden: „jeder Punkt der Wellenfläche soll als eine Lichtquelle angesehen werden, welche ebenso bewegt wird, wie die ursprüngliche Lichtquelle." Es ergibt sich hieraus, daß bei jeder Reflexion oder Brechung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ceteris paribus bloß abhängig ist von der Richtung, die der reflektierte bzw. gebrochene Strahl mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung der Quelle einschließt.

Die Annahme (3) erklärt also ungezwungen das negative Ergebnis des Michelsonschen Versuches.

Man kann die Annahme (3) mit der folgenden vertauschen, welche mit ihr bis auf Größen zweiter Ordnung in $\frac{u}{c_0}$ übereinstimmt:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u \cos \vartheta}{c_0}\right)^2}}. \qquad (4)$$

2. Der Versuch von Trouton und Noble.

So lange man die Feldgleichungen im Sinne unserer Hypothese nicht formuliert hat, kann man das Problem des Kondensators nicht mit Strenge behandeln. Doch läßt sich — wie ich glaube — auf Grund folgender Überlegungen erkennen, daß unsere Hypothese geeignet ist, auch diesen Versuch zu erklären. Man kann sich nämlich überzeugen, daß unsere Hypothese „rechnerisch" mit der Hypothese der Lorentz-Kontraktion übereinstimmt.

In der Tat haben die auf Grund der Absoluttheorie für den Fall des geladenen Kondensators abgeleiteten Drehkräfte ihren Sitz im Äther, der auf die von den Ladungen ausgehenden elektrischen Kräfte mit einer Rückwirkung antwortet. Wirkung und Gegenwirkung pflanzen sich beide mit Lichtgeschwindigkeit im Äther fort. Um eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment herzustellen, haben Fitzgerald und Lorentz angenommen, daß jede Strecke, welche den Winkel ϑ mit der Richtung der Translation einschließt, im Verhältnis

$$1 : \left(1 + \frac{(u \cos \vartheta)^2}{2 c_0^2}\right) \qquad (5)$$

verkleinert wird.

Nach unserer Hypothese bleiben die Abmessungen des Systems ungeändert, dagegen wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im dem Verhältnisse (5) vergrößert, was — wie ich oben bemerkt habe — „rechnerisch" der Fitzgerald-Lorentzschen Hypothese äquivalent ist.

3. Elektromagnetische Masse.

Für die elektromagnetische Masse des Elektrons gilt wörtlich dasselbe, was über die elektrostatischen Versuche bemerkt wurde; nur müssen wir — um zu der mit den Experimenten gut übereinstimmenden Formel von Lorentz-Einstein zu gelangen — unsere Formel (4) für die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Lichtquelle benutzen.

4. Die Cohnschen Gleichungen.

Ich muß noch mit einigen Worten auf den Zusammenhang meiner Hypothese mit den elektrodynamischen Feldgleichungen des Herrn E. Cohn eingehen, in welchen eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit des Mediums eingeführt ist.

Bekanntlich sind dieselben mit allen bisherigen Experimenten im Einklang; es wurde jedoch gegen dieselben der Einwand erhoben, sie wären physikalisch nicht zu deuten, wenn man sie auf den Äther anwenden will; die Schwierigkeit lag eben darin, daß man von der Geschwindigkeit des Vakuums in einem Raumpunkte sprechen müßte.

Meine obigen Überlegungen verfolgen gerade den Zweck, diese Schwierigkeit so zu umgehen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als eine Funktion der Licht- bzw. Kraftquellengeschwindigkeit angesehen wird.

Ich habe diesen Gedanken einstweilen ohne Zugrundelegung eines bestimmten Feldgleichungssystems verfolgt, bloß durch Zuhilfenahme einer geeigneten Hypothese für die Lichtgeschwindigkeit. Die Frage, ob die Cohnschen Gleichungen einer ähnlichen Interpretation fähig sind, soll diesmal nicht berührt werden.

Budapest, Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 16. April 1914.)

Über die Beeinflussung der Adsorption des Uran X_1 durch die Gegenwart von anderen Stoffen.

(Zur Frage der „identischen" Radioelemente.)

Von H. Freundlich, W. Neumann und H. Kaempfer.

Die „Untrennbarkeit" gewisser Radioelemente ist bekanntlich von großer, grundsätzlicher Wichtigkeit geworden, da man auf ihr fußend die Radioelemente hat chemisch kennzeichnen und in das periodische System einordnen können[1]). Man fand Gruppen von untrennbaren Elementen — Plejaden nach Fajans[2]), isotopische Elemente nach Soddy[3]) —, die an Stelle von einzelnen Elementen in das periodische System einzureihen waren. Noch eine andere Eigenschaft hat Soddy[4]) mit dieser Untrennbarkeit in Zusammenhang gebracht: Ritzel[5]) hat seinerzeit die Adsorption von UrX_1 durch Blutkohle untersucht und fand u. a., daß die starke Adsorption durch die Gegenwart von kleinen Mengen von Thoriumsalzen völlig aufgehoben wurde, während ein Stoff wie Aluminiumsulfat nicht so wirkte. Uran X_1 und Thorium gehören nun zu einer Plejade, und Soddy nimmt zur Erklärung der Erscheinung an, daß das *Th* die Adsorptionsfähigkeit der Kohle für UrX_1 gewissermaßen absättigt, die *Th*-Atome vertreten sozusagen die ihnen praktisch gleichen UrX_1-Atome an der Kohlenoberfläche. Die Auffassung hat allseitig[6]) Anklang gefunden.

Wir haben nun bei der Nachprüfung der Ritzelschen Versuche sie experimentell vollkommen bestätigen können, sind aber dann doch, als wir sie ausdehnten, zu einer anderen Deutung der Erscheinung gelangt.

Der Gang unserer Versuche entsprach im wesentlichen dem der Ritzelschen: eine Lösung von UrX_1-haltigem Uranylnitrat (pro analysi von Merck) wurde mit reinster Blutkohle (pro analysi von Merck) eine gegebene Zeit geschüttelt, von der Kohle abfiltriert, erst in einer Porzellanschale, dann in einem *Al*-Blechschälchen zur Trockne eingedampft und schließlich in bekannter Weise die β-Strahlenaktivität des Rückstandes mit einem Elektroskop gemessen. Die Lösung war 0,55 norm., es wurden 11 ccm derselben mit 1 ccm der Lösung versetzt, die den Zusatzstoff ($Th(NO_3)_4$, Benzoesäure u. dergl.) enthielt, und die Kohle zugewogen. In den nachfolgenden, ausführlicher mitgeteilten Versuchen wurde 230 Stunden lang geschüttelt, da in dieser Zeit nach Ritzel[1]) ein gewisser Endzustand eingetreten ist. Die unmittelbar am Elektroskop gemessene Aktivität wurde unter Berücksichtigung des Normalverlustes auf die Zahl der Teilstriche umgerechnet, die in einer Stunde vom Blättchen durchlaufen worden wären; diese relativen Zahlen sind im nachfolgenden als Aktivitäten angeführt.

Schüttelt man 11 ccm der $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung plus 1 ccm Wasser mit 20 mg Kohle, so sinkt die Aktivität von 154 auf 26,8; dies um einen Begriff von der starken Adsorptionswirkung zu geben.

Gibt man statt des Wassers $Th(NO_3)_4$-Lösung in wachsender Konzentration hinzu, so bestätigt sich die ungeheure Zurückdrängung der Adsorption des UrX_1, wie die Tabelle 1 zeigt.

Tabelle 1.

11 ccm $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung, 1 ccm Wasser bzw. $Th(NO_3)_4$-Lösung, 20 mg Kohle.

$Th(NO_3)_4$-Konzentration in mg pro 12 ccm	in Millimol i. L.	Aktivität
$\frac{1}{\infty}$	$\frac{1}{\infty}$	26,8
0,00256	0,00039	32,0
0,0256	0,0039	88,7
0,256	0,039	133
2,56	0,39	145
25,6	3,9	157

Es genügt also ein Gehalt von 0,00039 Millimol i. L. — 0,0025 mg in den 12 ccm —, um eine schon merkbare Wirkung hervorzurufen, etwa 4 Millimol heben die Adsorption praktisch völlig auf.

Aber dies ist, wie unsere weiteren Versuche ergaben, keine spezifische Wirkung des isotopischen *Th*-Atoms. Alle möglichen anderen Stoffe haben die gleiche Wirkung; was ihnen gemeinsam ist, konnte noch nicht endgültig festgestellt werden, eine starke Adsorbierbarkeit scheint aber von Bedeutung zu sein. Zunächst zeigten Zirkonsalze denselben Einfluß in einem ähnlichen Konzentrationsbereich; dies hätte man noch mit der engen Verwandtschaft zwischen *Zr* und *Th* erklären können, und hätte es in Parallele gestellt mit den Ergebnissen von Fajans und Beer[2]),

1) Soddy, Chemie d. Radioelemente, S. 49 u. folg.; Chem. News **107**, 97, 1913; v. Hevesy, diese Zeitschr. **14**, 49, 1913; Phil. Mag. **25**, 390, 1913; Russell, Chem. News **107**, 49, 1913; Fajans, diese Zeitschr. **14**, 131, 1913; Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch. **46**, 422, 1913; Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. **15**, 240, 1913.

2) Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. **15**, 245, 1913.

3) Phil. Mag. **27**, 215, 1914.

4) Journ. Chem. Soc. **99**, 72, 1911; Chemie d. Radioelemente, S. 53 u. 79.

5) Zeitschr. f. phys. Chem. **67**, 747—748, 1909.

6) Rutherford, Radioactive Substances, S. 601; Paneth u. v. Hevesy, Wien. Monatshefte **34**, 1038, 1913.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **67**, 724, 1909.

2) Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch. **46**, 3486, 1913.

daß bei Fällungsreaktionen nicht bloß isotopische Elemente das betreffende Radioelement niederreißen, sondern auch solche, die zur selben Gruppe gehören.

Tabelle 2.

11 ccm $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung, 1 ccm H_2O bzw. $ZrOCl_2$-Lösung, 20 mg Kohle.

$ZrOCl_2$-Konzentration in mg pro 12 ccm	$ZrOCl_2$-Konzentration in Millimol i. L.	Aktivität
$\frac{1}{\infty}$	$\frac{1}{\infty}$	26,8
0,00132	0,000343	35,1
0,0132	0,00343	42,8
0,132	0,0343	58,3
1,32	0,343	93,4
13,2	3,43	118

Aber diese Erklärung ging nicht mehr an, als sich herausstellte, daß auch die stark adsorbierbare Benzoesäure einen ähnlichen Einfluß ausübte. Die mit ihr erzielten Ergebnisse folgen in Tabelle 3.

Tabelle 3.

11 ccm $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung, 1 ccm Wasser bzw. Benzoesäurelösung, 5 mg Kohle.

Benzoesäurekonzentration in mg pro 12 ccm	Benzoesäurekonzentration in Millimol i. L.	Aktivität
$\frac{1}{\infty}$	$\frac{1}{\infty}$	73,2
0,00088	0,0006	72,5
0,0088	0,006	80,9
0,088	0,06	82,0
0,88	0,6	120
8,8	6,0	137

Hier also gleichfalls eine merkbare Wirkung bei einem Gehalt von 0,006 Millimol i. L.

Nach unseren bisherigen Versuchen haben wir einen derartigen entschiedenen Einfluß bei Cero- und Wismutsalzen und bei Strychninnitrat beobachtet, einen sehr viel geringeren oder kaum merkbaren bei Salzen der Alkalien, Erdalkalien, des Radiums, des Aluminiums, des Eisens, des Silbers, des Thalliums, des Bleies u. a. m.

Es schien uns nach diesen Ergebnissen zunächst wahrscheinlich, daß es sich hier einfach um eine verdrängende Adsorption handelt, wie sie schon öfters[1]) beschrieben worden ist und wie sie mit der Radioaktivität an sich nichts zu tun hat: durch die Adsorption eines zweiten, in größerer Konzentration anwesenden Stoffes wird der erste an der Oberfläche anwesende Stoff verdrängt. Nach den bisherigen Erfahrungen über die Adsorption in Gemischen ist allerdings der in kleinerer Konzentration vorhandene Stoff sehr im Vorteil, d. h. seine Adsorption ist relativ merkbar bevorzugt. Immerhin sollte man doch vermuten, daß auch hier bei Gegenwart größerer Mengen stark adsorbierbarer Stoffe eine Verdrängung statthat.

Wir bestätigten diese Auffassung noch in zweierlei Weise. Einmal ließ sich zeigen, daß irgendein anderer Stoff, kein Radioelement, ganz ebenso durch $Th(NO_3)_4$ von der Kohlenoberfläche verdrängt wird. Leider haben wir keine Stoffe, die in ähnlich niedrigen Konzentrationen analytisch bestimmbar sind, wie es bei den Radioelementen der Fall ist. Um nun doch die Verhältnisse möglichst ähnlich zu gestalten, wurde ein Stoff gewählt, der sich dank seiner katalytischen Wirksamkeit in sehr kleinen Konzentrationen bestimmen läßt. Es empfiehlt sich da besonders das Cu-Ion; man hat ja schon mehrfach seine Fähigkeit, die Reaktion zwischen Persulfat und Jodion in saurer Lösung, vor allem in Gegenwart von Ferrosalzen, stark zu beschleunigen[1]), dazu benutzt, um es in geringen Konzentrationen zu analysieren[2]).

Die Versuche wurden folgendermaßen ausgeführt: Zu 55 ccm einer Lösung, die wenig $Cu(NO_3)_2$ und viel $NaNO_3$[3]) enthielt, wurden 5 ccm Wasser bzw. $Th(NO_3)_4$-Lösung zugesetzt und dann 100 mg Kohle. Nach 60stündigem Schütteln wurde die Kohle abzentrifugiert und 50 ccm der Lösung zur Analyse verwendet, d. h. sie wurden zu einer Lösung von $K_2S_2O_8 + KJ$ gegeben, zu der dann noch H_2SO_4 und Mohrsches Salz zugefügt wurde, und man bestimmte dann mit Thiosulfatlösung die Geschwindigkeit, mit der sich Jod nach der Gleichung

$$K_2S_2O_8 + 2HJ = J_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$$

bildete. Es war natürlich vorher eine Eichungskurve mit bekannten Cu-Ionkonzentrationen aufgenommen worden, und man hatte sich auch überzeugt, daß $Th(NO_3)_4$ und $NaNO_3$ keinen störenden Einfluß ausüben. In allen Versuchen war die Cu-Ionkonzentration in der Ausgangslösung die gleiche, während die Konzentration von $Th(NO_3)_4$ variiert wurde.

Tabelle 4 zeigt nun, daß das Cu-Ion in ganz ähnlicher Weise vom $Th(NO_3)_4$ von der Kohle in die Lösung zurückgedrängt wird, wie

1) Michaelis u. Rona, Biochem. Zeitschr. **15**, 196, 1908; Freundlich u. Masius, van Bemmelen-Gedenkbuch, S. 88, 1910.

1) Price, Zeitschr. f. phys. Chem. **27**, 474, 1898.

2) Weiß, ebendort **54**, 305, 1906; Freundlich u. Schucht, ebendort **85**, 651, 1913.

3) Die Lösung war 0,55 normal bezüglich des $NaNO_3$. Dieser Stoff wurde zugesetzt, um die Verhältnisse möglichst denen bei den $UrO_2(NO_3)_2$-Lösungen gleichzustellen, wo man ja auch stets in einer stark elektrolythaltigen Lösung arbeitet. Das $NaNO_3$ empfiehlt sich, weil es bezüglich der verfolgten Reaktion indifferent ist.

das beim UrX_1 auch der Fall war. Sehr deutlich wird die Ähnlichkeit, wenn man Fig. 3 — Verdrängung des *Cu*-Ions durch $Th(NO_3)_4$ — mit Fig. 1 und 2 — Verdrängung von UrX_1 durch $Th(NO_3)_4$ bzw. Benzoesäure — vergleicht.

Tabelle 4.

55 ccm *Cu*haltige $NaNO_3$-Lösung, 5 ccm Wasser bzw. $Th(NO_3)_4$-Lösung, 100 mg Kohle.

$Th(NO_3)_4$-Konzentration in mg pro 60 ccm	in Millimol i. L.	*Cu*-Ionkonzentration der Lösung in Millimol i. L.
1	1	0,0106
∞	∞	
0,128	0,0039	0,0155
1,28	0,039	0,0232
12,8	0,39	0,0410
		0,0472*)

*) Enthielt die Lösung vor der Adsorption.

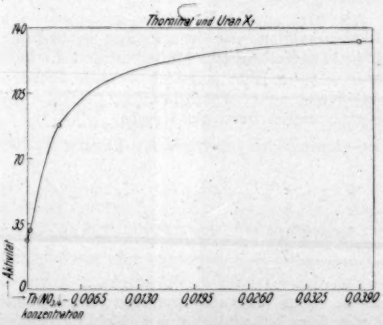


Fig. 1.

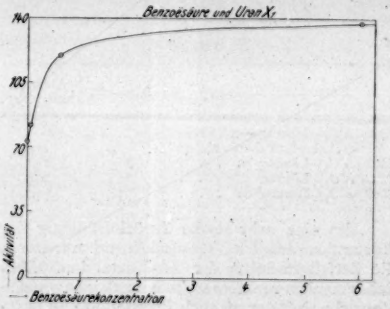


Fig. 2.

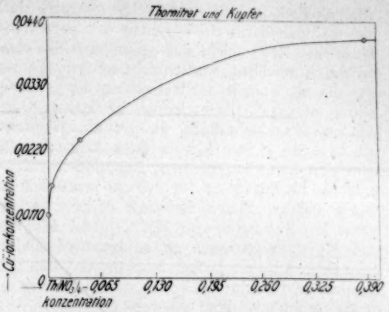


Fig. 3.

Noch schlagender ist wohl der zweite Versuch: 11 ccm von der früher benutzten Uranylnitratlösung wurden mit 20 mg Kohle 19 Stunden lang geschüttelt, dann wurde 1 ccm Wasser zugefügt und von neuem 24 Stunden geschüttelt; nach dem Abfiltrieren der Kohle wurden 10 ccm eingedampft und die Aktivität gemessen. Sie betrug 38,3. Der Parallelversuch wurde genau ebenso behandelt, nur war statt des Wassers 1 ccm $Th(NO_3)_4$-Lösung zugegeben worden — sie enthielt 2,56 mg, die Lösung also 0,39 Millimol i. L. —. Die Aktivität betrug aber jetzt 111. Es war also das UrX_1 durch den nachträglichen Zusatz von $Th(NO_3)_4$ reichlich von der Kohlenoberfläche verdrängt worden[1]).

Nach diesen Versuchen halten wir nicht nur die Erklärung der Ritzelschen Beobachtung auf Grund der gegenseitigen Vertretbarkeit von UrX_1 und *Th* für ausgeschlossen: uns scheinen sie vielmehr sogar ein Beweis dafür zu sein, daß isotopische Elemente durchaus chemisch verschieden sind; dazu führt der Verdrängungsversuch, dazu führt nicht minder die Tatsache, daß sich UrX_1 bei der Verdrängung durch *Th* ganz ebenso verhält wie das vom *Th* völlig verschiedene *Cu*.

Wir sehen tatsächlich bei der Durchprüfung der bisherigen Arbeiten keinen Grund dafür ein, die isotopischen Elemente für ähnlicher zu halten als etwa nahe verwandte Elemente der

1) Daß nicht etwa die Aktivität nach dem ersten 19 Stunden langen Schütteln so wenig (von 154 auf 111) abgenommen hatte, sondern daß sie schon nahe an 38,3 gelangt war, konnte man schon aus den Ritzelschen Versuchen abschätzen. Es wurde aber doch folgender Kontrollversuch ausgeführt: 11 ccm Uranylnitratlösung mit 20 mg Kohle 19 Stunden lang geschüttelt, dann 1 ccm Wasser zugesetzt und sofort von der Kohle abfiltriert; das Filtrat blieb 24 Stunden lang stehen und wurde dann eingedampft und die Aktivität bestimmt; sie ergab sich zu 51,2.

seltenen Erden. Man muß nicht vergessen, daß hier wahrscheinlich ein Umstand in verstärktem Maß eine Rolle spielt, der schon dort die chemische Ähnlichkeit beträchtlich erhöht. Es ist das die eigentümliche Erscheinung der „chémischen mimicry", die mehrfach beobachtet worden ist. Sie besteht darin, daß das eine Element oft in sehr kleiner Menge dazu imstande ist, dem ihm ähnlichen Element Reaktionen aufzuprägen, zu denen es im reinen Zustand nur wenig neigt. Einige Beispiele hiervon seien nach den Resultaten von Marc[1]) und Meyer und Koß[2]) angeführt: Praseodymoxyd bildet beim Glühen an der Luft das höhere Oxyd PrO_2, Lanthanoxyd nicht; einige Prozente Lanthanoxyd verhindern diese höhere Oxydation des Praseodymoxyds vollständig. Ceroverbindungen geben rein beim Glühen an der Luft CeO_2; Neodymverbindungen dagegen das Oxyd Nd_2O_3; ist das Ce im Überschuß, so wird das Nd veranlaßt, sich zu superoxydieren, im umgekehrten Fall bildet das Ce das Oxyd Ce_2O_3. Geglühtes Cerooxyd ist fast unlöslich in verdünnten Säuren, mit überschüssigem Lanthan-, Praseodym- oder Neodymoxyd gemengt löst es sich leicht.

Derartige Einflüsse möchte man bei den isotopischen Elementen in verstärktem Maße erwarten, weil eben das aufprägende Element so stark im Überschuß ist. Das häufig betonte, überraschend scharf definierte chemische Verhalten der in so winziger Menge vorliegenden Radioelemente ist danach nicht so verwunderlich. Es würde dann eben nicht daher rühren, daß die Atome des Radioelements mit denen des isotopischen Elements identisch sind, sondern daß das Radioelement eben bei den Reaktionen des nahe verwandten Elements, aber auch nur bei diesen, mitgeht.

Auch die im ersten Augenblick am schwerwiegendsten zugunsten der Identität sprechende Beobachtung von Russell und Rossi[3]), daß ein Thoriumpräparat, dessen Gehalt an (isotopischem) Ionium man auf etwa 10 Proz. schätzte, nur das Th-Spektrum gab, verliert an Gewicht, wenn man bedenkt, in wie ungeheurem Maße bei den Kathodolumineszenzspektren die seltenen Erden sich gegenseitig beeinflussen und verdecken können[4]). —

Gelegentlich dieser Versuche wurde noch eine andere Angabe Ritzels[5]) nachgeprüft. Er hatte zur Erklärung seiner Beobachtungen beim Thorium einen besonderen Einfluß der Radioelemente angenommen und war dadurch auf den Versuch geführt worden, den Einfluß der Th-Emanation auf die Adsorption des UrX_1 durch Kohle zu untersuchen. Er leitete einen Luftstrom über festes $Th(NO_3)_4$ in eine UrX_1-haltige Uranylnitratlösung; benutzte er nun diese Lösung für seinen Adsorptionsversuch, so war die adsorbierte Menge UrX_1 beträchtlich kleiner als in einer Parallellösung, durch die emanationshaltige Luft nicht durchgesaugt worden war. Die Menge Emanation, die so in die Lösung gelangt war und sehr merkbar wirkte, war so gering, daß die Aktivität der Lösung dadurch nicht erhöht wurde. Bei der ungeheuren Winzigkeit der Mengen von Th-Zerfallsprodukten, die auf solche Weise in die $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung gelangen würden, müßte dieser Versuch Ritzels — sofern sich keine experimentellen Einwände dagegen erheben ließen — mehr als alles andere zugunsten einer Sonderstellung der Radioelemente sprechen.

Als wir unsere Versuche genau so wie Ritzel anstellten, war der von ihm beobachtete Effekt in auffallendstem Maße vorhanden. Luft wurde — 3—4 Liter stündlich — neun Stunden lang durch acht Waschflaschen geleitet, die folgendermaßen beschickt waren:

Luft → konz. H_2SO_4 (1) $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung (2) H_2SO_4 (3)

festes $ZrOCl_2$ (4) $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung (5) H_2SO_4 (6)

festes $Th(NO_3)_4$ (7) $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung (8) →

Von den $UrO_2(NO_3)_2$-Lösungen 2, 5 und 8 wurden dann 11 ccm herausgenommen, mit 1 ccm Wasser und 20 mg Kohle versetzt, 36 Stunden lang geschüttelt und dann wie sonst die Aktivität der Lösung bestimmt.

Es ergab sich folgendes:

Tabelle 5.

Untersuchte Lösung	Aktivität	Aktivität nach 7 Tag.
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung — zum Vergleich, keine Luft durchgeleitet	27,6	27,4
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 2. . . .	28,5	28,5
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 5. . . .	29,8	29,7
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 8. . . .	75,3	72,2

Also eine sehr starke Zurückdrängung der Adsorption des UrX_1, anscheinend nur durch die Zerfallsprodukte der Th-Emanation. Ähnliches ergaben mehrere weitere, analog angestellte Versuche, bei denen auch Benzoesäure an Stelle des $ZrOCl_2$ zum Vergleich herangezogen wurde.

1) Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch. **35**, 2370, 1902; siehe auch Marc, Chem. Novitäten **4**, 4, 1907.
2) Ebendort **35**, 3740, 1902.
3) Proc. Roy. Soc. **87**, 478, 1912.
4) Siehe u. a. Baur u. Marc, Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch. **34**, 2460, 1901.
5) Zeitschr. f. phys. Chem. **67**, 749, 1909.

Obwohl der gerade zur Kontrolle angestellte Versuch mit Zirkonoxychlorid bzw. Benzoesäure keine solche Wirkung wie der Versuch mit Thoriumnitrat erkennen ließ, machte die große Empfindlichkeit der Erscheinung es doch wünschenswert, auch die äußerste Vorsichtsmaßregel anzuwenden: ein Stäubchen von wenig mehr als $^1/_{100}$ mg $Th(NO_3)_4$ hätte ja nach Tabelle 1 genügt, um die beobachtete Wirkung hervorzubringen. Um jedes Übergehen von $Th(NO_3)_4$-Stäubchen mit dem Luftstrom auszuschließen, wurde in einer weiteren Versuchsreihe ein etwa 3 cm langer, lockerer Wattebausch zwischen die Flasche mit dem $Th(NO_3)_4$ und die mit der $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung eingeschaltet. Die Anordnung war also:

Luft → H_2SO_4 (1) $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung (2) H_2SO_4 (3)

Benzoesäure (4) $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung (5) H_2SO_4 (6)

Wattebausch

$Th(NO_3)_4$ (7) $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung (8) →

und das Ergebnis

Tabelle 6.

Untersuchte Lösung	Aktivität
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung — zum Vergleich — .	40,8
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 2	41,5
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 5	40 9
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 8	43,4

Die früher beobachtete Wirkung der *Th*-Emanation blieb jetzt aus.

Ganz bündig war schließlich noch folgender Versuch. Die Anordnung war völlig die gleiche wie im vorangehenden Fall, nur befand sich in Flasche 7 statt des festen $Th(NO_3)_4$ 10 ccm einer Lösung von *ThX*, die etwa $^1/_2$ mg $RaBr_2$ der γ-Strahlung nach äquivalent war; der Luftstrom wurde ferner nur 90 Minuten durchgeleitet.

Das Ergebnis war das folgende:

Tabelle 7.

Untersuchte Lösung	Aktivität
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung — zum Vergleich — .	27,2
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 2	33,4
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 5	31,8
$UrO_2(NO_3)_2$-Lösung 8	30,6

Um zu beweisen, daß bei diesem Versuch reichlich *Th*-Emanation durch die $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung gegangen war, wurde gleich nach Beendigung des Versuchs in Flasche 8 ein *Al*-Blech gerade dorthin gehängt, wo sich sonst Lösung befunden hätte; dann wurde unter denselben Bedingungen Luft durchgeleitet. Die Aktivität des Bleches betrug nach anderthalbstündigem Durchleiten 876 (bei Bedeckung mit Papier) bzw. 3725 (ohne Papier). Die Emanationsmengen, die hier wirken, sind jedenfalls ganz enorm im Vergleich zu den im Ritzelschen Versuch in Frage kommenden[1]).

Die Wirkung der *Th*-Emanation rührt also tatsächlich von $Th(NO_3)_4$-Stäubchen her, die vom Luftstrom oder vielleicht richtiger von der Emanation mitgenommen worden sind[2]). Diese Mitnahme von festen, radioaktiven Teilchen durch einen emanationshaltigen Luftstrom scheint schon mehrfach beobachtet worden zu sein.

Daß der Ritzelsche Effekt tatsächlich von $Th(NO_3)_4$-Teilchen herrührt, geht übrigens auch daraus hervor, daß er nicht mit dem Verschwinden der *Th*-Emanation bzw. ihrer Zerfallsprodukte aus der Lösung verschwindet. Bei dem Versuch in Tabelle 5 wurden die Lösungen 7 Tage stehen gelassen, und dann von neuem in völlig gleicher Weise die Adsorptionsversuche angestellt. Das Ergebnis findet sich schon in der dritten Kolonne von Tabelle 5. Die Aktivitäten haben sich praktisch nicht geändert. So müßte es sein bei einer Wirkung des $Th(NO_3)_4$, nicht aber bei einer Wirkung der *Th*-Emanation.

Es muß nun noch eins angemerkt werden. Ritzel hat seine Versuche mit einer $UrO_2(NO_3)_2$-Lösung angestellt, in der das UrX_1 neu bis zum Gleichgewicht angewachsen war; er vermied so den Einfluß der Radioelemente zwischen dem UrX_1 und dem *Ra*, die in einer nicht vorbehandelten Lösung anwesend sind. Wir beabsichtigen, um jedem Einwand zu begegnen und weil man daraus vielleicht noch andere Aufschlüsse gewinnen kann, unsere wesentlichsten Versuche auch mit neu gewachsenem UrX_1 zu wiederholen. Es darf aber jetzt schon als ausgeschlossen gelten, daß unsere Ergebnisse der Sache nach irgendwie geändert werden könnten. Ritzel fand ja auch bei vorbehandelten und nicht vorbehandelten Lösungen qualitativ durchaus dieselben Erscheinungen, nur im Betrag der adsorbierten Menge waren Unterschiede vorhanden.

1) Man könnte sich darüber wundern, daß in Tabelle 7 die Lösung, die die *Th*-Zerfallsprodukte enthält, nicht merklich aktiver ist als die Vergleichslösungen. Es liegt dies wohl daran, daß die genannten Produkte von der Kohle auch adsorbiert worden sind. Denn daß sie nicht in der Lösung vorhanden sind, ging auch daraus hervor, daß sich die nach Tabelle 7 gemessenen Aktivitäten nach mehreren Tagen praktisch nicht geändert hatten.

2) Letzteres scheint uns nicht unmöglich, weil es doch auffallend ist, daß nach den Tabellen 5—7 vom $ZrOCl_2$ bzw. von der Benzoesäure durch den Luftstrom praktisch gar nichts mitgenommen worden ist.

Zusammenfassung.

1. Es wurden die Ritzelschen Versuche über die Beeinträchtigung der Adsorption des UrX_1 an Blutkohle durch die Gegenwart von Thorium bestätigt. Die Wirkung tritt schon bei sehr kleinen Mengen ein; ein Gehalt von etwa 0,0004 Millimol $Th(NO_3)_4$ i. L. (gleich etwa 0,2 mg i. L.) erhöht die Aktivität der Lösung nach der Adsorption um etwa 20 Proz.

2. Die Wirkung ist aber nicht spezifisch für Thorium, auch nicht für Radioelemente, sondern findet sich bei einer größeren Anzahl von Stoffen: Zirkonsalzen, Benzoesäure, Strychninnitrat u. a. m.

3. Man kann also die Erscheinung nicht damit erklären, daß das Thorium das mit ihm isotopische UrX_1 an der Kohlenoberfläche vertritt.

4. Wahrscheinlich handelt es sich vielmehr um eine Verdrängung des Uran X_1 durch andere, stark adsorbierbare Stoffe; dafür spricht einmal, daß man das UrX_1 auch durch nachträglichen Zusatz von $Th(NO_3)_4$ von der Kohle verdrängen kann; ferner daß Cu-Ion in ganz derselben Weise, ja mit der gleichen Abhängigkeit von der $Th(NO_3)_4$-Konzentration durch Thorium an der Kohlenoberfläche vertreten werden kann.

5. In den unter 4. erwähnten Versuchen verhält sich UrX_1 dem Th gegenüber weitgehend wie ein völlig anderer Stoff, etwa Cu. Es scheint daher nicht richtig zu sein, isotopische Elemente als fast chemisch identisch anzusehen. Wenn sie bei chemischen Reaktionen so weitgehend untrennbar sind, so hängt das vielleicht mit der bei den seltenen Erden beobachteten „chemischen Mimicry" zusammen: das eine Element prägt dem nahe verwandten sein chemisches Verhalten auf.

6. Die von Ritzel beschriebene Beeinträchtigung der Adsorption des UrX_1 an Kohle durch die Gegenwart von Th-Emanation verschwindet, wenn die Emanation vor dem Eintritt in die Lösung durch Watte filtriert wird. Es handelt sich in den Ritzelschen Versuchen um die Wirkung von $Th(NO_3)_4$-Stäubchen, die von dem emanationshaltigen Luftstrom mitgerissen worden waren.

Diese Untersuchung wurde mit Unterstützung der Solvay-Stiftung ausgeführt, der wir hiermit vielmals danken möchten.

Braunschweig, Physikal.-chem. Institut d. Herzogl. Technischen Hochschule.

(Eingegangen 9. April 1914.)

BESPRECHUNGEN.

J. Perrin, Die Atome. Mit Autorisation des Verfassers deutsch herausgegeben von A. Lottermoser. Mit 13 Abbildungen im Text. gr. 8. XX u. 199 Seiten. Dresden, Theodor Steinkopff. 1914. M. 5.—, geb. M. 6.—

Eine von tiefer Überzeugung getragene meisterhafte Darstellung vermittelt die Gedankengänge, die zur Annahme der körperlichen Existenz der Moleküle uns zwingend geführt haben. Grundlagen der Atomtheorie, der kinetischen Gastheorie, die Brownsche Bewegung (Experiment und Theorie), Energiequanten, Elektronen und Radioaktivität sind die Gebiete, durch die uns Perrin am Leitfaden der Avogadroschen Zahl rasch und sicher hindurchführt. Überall erfaßt er den springenden Punkt und verweilt taktvoll bei Schwierigkeiten. Dem, der den Stoff nur wenig kennt, ist das Buch ein hervorragender Lehrer, und dem, der ihn kennt, bereitet die geistreiche Darstellung hohen Genuß. Hinweisen will ich auf das Kapitel über Quantentheorie und speziell auf die interessante quantentheoretische Behandlung der Rotationsenergie der Atome und die daraus gezogenen Folgerungen. Anerkennung verdient die sorgfältige Übertragung ins Deutsche.

H. Hörig.

W. H. Bragg, Durchgang der α-, β-, γ- und Röntgenstrahlen durch Materie. Deutsch von M. Iklé. gr. 8. VI u. 241 S. mit 70 Figuren. Leipzig, J. A. Barth. 1913. M. 6.80, gebunden M. 7.80

Das Buch beginnt mit einer historischen Darstellung der Versuche, die Bragg zur Auffindung der Reichweite der α-Strahlen geführt haben, und bringt dann in ausführlicher Weise das meiste dessen, was wir heute über die Natur der α-Strahlen wissen, vor allem auch die Vorgänge der Ionenbildung, die bei den α-Strahlen die Eigentümlichkeit der „anfänglichen Wiedervereinigung" aufweist, weil die Ionen längs der Schußkanäle der α-Strahlen in geradlinigen Bahnen angeordnet sind. In drei folgenden Kapiteln werden sodann die Zerstreuung, die Geschwindigkeitsverluste und allgemein die „Absorption" schneller Elektronen, der β-Strahlen, behandelt, und hierbei wird die Vorstellung des „gelegentlichen Verschwindens eines Elektrons zugunsten eines Röntgen- oder γ-Strahles" eingeführt. Dies gibt die Überleitung zum zweiten Teil des Buches, das der Braggschen Korpuskulartheorie der γ- und Röntgenstrahlen gewidmet ist, nach der die genannten Strahlen nicht dem Lichte wesensgleich sind, sondern korpuskular aus Elektronen mit kompensierter Ladung bestehen sollen. Bragg hat bekanntlich diese Auffassung in zahlreichen Arbeiten zu stützen gesucht und bringt in diesem Buch eine aus-

führliche Diskussion all der experimentellen Tatsachen, die durch seine Theorie besser als durch die sonst allgemein angenommene Äthertheorie wiederzugeben sein sollen. Es ist insbesondere die große Energiekonzentration, die wir bei der Absorption der Strahlen in der Emission sekundärer Elektronen beobachten, obwohl die im Photoeffekt ganz analoge Schwierigkeit im Gebiete des Lichtes wohl kaum zur Rückkehr zu einer Korpuskulartheorie des Lichtes als ausreichend gelten wird. Noch im Vorwort des Buches bemerkt Bragg nach Erwähnung der Laueschen Entdeckung über die korpuskularen und die Ätherntheorien: „Irgendwie — wie, das können wir zurzeit noch nicht völlig verstehen — sind beide Theorien richtig". Aber es ist doch wohl zu erwarten, daß Herr Bragg heute nach all den schönen Beweisen, die er inzwischen selbst für die Interferenzfähigkeit der Röntgenstrahlen beigebracht hat, für seine eigene Theorie wohl nicht mehr als historisches Interesse beansprucht. R. Pohl.

Samuel Smiles, Chemische Konstitution und physikalische Eigenschaften. Aus dem Englischen übersetzt von P. Krassa. Bearbeitet und herausgegeben von R. O. Herzog. gr. 8. XII u. 676 S. Dresden, Th. Steinkopff. 1914. geh. M. 20.—, geb. M. 21.50

Gegenüber dem Original ist die Übersetzung durch den Herausgeber und seine Mitarbeiter, besonders F. Kaufler und R. Leiser, ergänzt, umgearbeitet und um mehrere wichtige Kapitel erweitert worden. Sie umfaßt die Abschnitte: Raumerfüllung, Kapillarität, Viskosität, spezifische Wärme, Schmelzpunkt, Siedepunkt, latente Verdampfungswärme, Bildungswärmen und Verbrennungswärmen, Brechungs- und Zerstreuungsvermögen, Absorption des Lichtes, Fluoreszenz, optisches Drehungsvermögen, Leitfähigkeit, Dielektrizitätskonstante, elektrische Doppelbrechung, anormale elektrische Absorption, magnetische Suszeptibilität, magnetisches Drehungsvermögen, magnetische Doppelbrechung. Der Physiker wird an dem Buch seine Freude haben, wenn er sieht, wie reichlich und erfolgreich seine Methoden der Chemie zu Hilfe kommen. Aber er wird andernteils mit Bedauern wahrnehmen, wie kümmerlich es mit der exakten Herausarbeitung der Beziehungen beider im Titel genannter Begriffe bestellt ist, wie das Ergebnis des Buches im großen und ganzen und von berühmten Ausnahmen (z. B. opt. Drehungsvermögen und asym. C-Atom) abgesehen nur Näherungsregeln sind, weit entfernt vom physikalischer Strenge, „latente Mathematik", wie in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften über die Chemie zu lesen ist. Es liegt jene Unvollkommenheit daran, daß der mit den physikalischen Konstanten zu kombinierende Begriff „chemische Konstitution" zur Zeit noch ein vergleichsweise roher ist, „sinnliche Bilder, die in der vorgetragenen Weise unmöglich richtig sein können" (Helmholtz). Material zu einer Verfeinerung der Bilder beizubringen, ist die ausgesprochene Absicht des Verfassers und Herausgebers des Buches und man wird die Durchführung dieser Absicht mit lebhaftem Danke anerkennen. Wilhelm Biltz.

J. Stark, Die Atomionen chemischer Elemente und ihre Kanalstrahlenspektra. Mit 11 Figuren im Text und auf einer Tafel. gr. 8. u. 39 Seiten. Berlin, Julius Springer. 1913. M. 1,60.

Diese Broschüre verdankt ihre Entstehung dem von Herrn Stark auf der Naturforscherversammlung in Wien 1913 gehaltenen Vortrage und enthält ein Referat der Arbeiten des Verfassers und seiner Schüler auf dem Gebiete der Kanalstrahlenspektren. Bei dem großen Material, das man dieser Starkschen Schule bereits verdankt, ist diese Schrift (abgeschlossen September 1913) sehr geeignet zur Orientierung, namentlich, wenn man noch die Bibliographie des Stark-Doppler-Effekts von Fulcher im Jahrbuch der Rad. und Elektronik 1913 zu Rate zieht. Hervorgehoben sei das Kapitel über „mehrfache Ionisierung chemischer Atome und die Zahl ihrer Valenzelektronen", worüber auch in dieser Zeitschrift 1913, Seite 961 und 965 eingehend berichtet worden ist. Charakteristisch ist die — ich möchte sagen englische — Kühnheit der Hypothesen Starks. Sein Streben nach Vorstellung dürfte wohl auch die wesentliche Wurzel seiner neuen fundamentalen Arbeit über den „Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien" bilden. H. Hörig.

R. Blondlot, Einführung in die Thermodynamik. Mit Zusätzen und Verbesserungen des Autors versehene autorisierte deutsche Ausgabe der zweiten französischen Auflage, besorgt von Carl Schorr und Friedrich Platschek. gr. 8. VIII und 102 S. m. 41 Fig. Dresden, Theodor Steinkopff. 1913. M. 4.—

Man muß von der Darstellung sagen, daß sie für die Einführung in die Thermodynamik, namentlich, was die Theorie der gewöhnlichen Dampfmaschinen betrifft, sehr geeignet ist. Besonders gut ist die Kelvinsche Definition der absoluten Temperatur, der nicht leichte Begriff der spezifischen Wärme des Dampfes und das Entropiediagramm behandelt. Für eine allgemeine Einführung ist das Buch jedoch ein wenig zu einseitig. Dem Techniker, soweit für ihn Thermodynamik Nebenfach ist, könnte das Buch jedoch sehr willkommen werden, wenn es auch etwas über Ausfluß von Gasen und Dämpfen enthielte. Vielleicht wird es in einer neuen Auflage nach dieser Richtung hin ergänzt. Reinganum.

J. Blein, Optique géométrique. 8. 275 S. mit 107 Textfiguren. Paris, O. Doin et Fils. 1913. Fr. 5.—

Der Verfasser schreibt in der Einleitung, daß das Buch bezweckt, dem Leser die Kenntnisse zu übermitteln, welche zum Studium umfangreicherer Werke über die geometrische Optik erforderlich sind. Demgemäß werden in dem I. Teil die Gesetze der Strahlenbrechung, im II. Teil die Abbildung durch zentrierte Systeme im allgemeinen behandelt, während der III. Teil den zusammengesetzten optischen Instrumenten gewidmet ist. Der 4. und letzte Teil des Buches enthält die Theorie der Aberrationen dritter Ordnung.

Die Darstellung ist klar und verständlich, und das Buch dürfte nach seiner ganzen Anlage seinem Zwecke vollkommen gerecht werden, da auch entstellende Druckfehler kaum vorkommen. Zu bemerken ist jedoch, daß die Figuren kaum den normalen Ansprüchen genügen, teilweise sogar, wie z. B. Fig. 96, sehr zu beanstanden sind. H. Schulz.

Annuaire pour l'an 1914. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. kl. 8. VII u. 686 S. Paris, Librairie Gauthier-Villars. 1914. Fr. 1.50

Über die Anlage dieses außerordentlich brauchbaren Taschenbuchs, dem wir in Deutschland leider kein ähnliches Werk von gleicher Wohlfeilheit an die Seite zu stellen haben, ist bereits gelegentlich der Besprechung der früheren Jahrgänge (diese Zeitschr. **14**, 508, 1913) berichtet worden.

Die Ausgabe für 1914 enthält außer den regelmäßig mitgeteilten astronomischen und chronologischen Daten physikalische und chemische Tabellen, die nach den neuesten Auflagen des Recueil de Constantes physiques der Société française de Physique (1913) und der physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt-Börnstein ergänzt und berichtigt sind.

Als Anhang ist von P. Hatt eine sehr anschauliche Besprechung der scheinbaren Verzerrungen gegeben, die sich bei Betrachtung entfernter Gegenstände von einfachen geometrischen Formen mit einem stark vergrößernden Fernrohre dadurch ergeben, daß die Abmessungen parallel zur Absehenslinie des Fernrohres eine andere Vergrößerung erfahren als die dazu senkrechten.

G. Bigourdan bespricht dann nach einer zusammenfassenden Übersicht über die Einteilung des Tages bei den verschiedenen Völkern des Altertums und der Neuzeit die Bestrebungen, die zu der Einführung der Zonenzeit im internationalen Verkehr geführt haben. Verschiedene Methoden der optischen und elektrischen Zeitübertragung werden kurz behandelt; sehr ausführlich aber wird über den Stand der Zeitübertragung mittels drahtloser Telegraphie berichtet. Ein Bericht über die Resultate der Verhandlungen der vom 15.—23. Oktober 1912 in Paris versammelten Conférence internationale de l'heure, welche die Ausdehnung dieses Zeitdienstes über die ganze Erde vorbereitete, bildet den Schluß der Bigourdanschen Abhandlung. R. Ambronn.

Tagesereignisse.

Preisaufgaben der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft für die Jahre 1914 und 1916. 1. Für das Jahr 1914: Es sind die Dielektrizitätskonstante und die lösenden und dissoziierenden Eigenschaften des flüssigen Fluorwasserstoffes zu untersuchen und die erhaltenen Resultate mit den bestehenden Theorien der elektrolytischen Dissoziation in Verbindung zu bringen. 2. Für das Jahr 1916: Die Theorie der linearen Funktionaldifferentialgleichungen ist in irgendeiner Richtung zu fördern. Besonders wünschenswert wäre eine ganz durchgreifende Behandlung neuer Spezialfälle.

Der Preis für jede gekrönte Abhandlung beträgt M. 1500. Die Einlieferung hat jeweilig bis zum 31. Oktober 1914 bzw. 1916 zu erfolgen.

Der Jahresbericht, der ausführlichere Mitteilungen über die gestellten Preisaufgaben enthält, ist durch den Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1914 Herr Geheimer Rat Professor Dr. Brugmann, Leipzig, Schillerstraße 7 II) zu beziehen.

v. Reinach-Preis für Paläontologie. Ein Preis von 500 Mark soll der besten Arbeit zuerkannt werden, die einen Teil der Paläontologie des Gebietes zwischen Aschaffenburg, Heppenheim, Alzey, Kreuznach, Koblenz, Ems, Gießen und Büdingen behandelt; nur wenn es der Zusammenhang erfordert, dürfen andere Landesteile in die Arbeit einbezogen werden.

Die Arbeiten, deren Ergebnisse noch nicht anderweitig veröffentlicht sein dürfen, sind bis zum 1. Oktober 1915 in versiegeltem Umschlage, mit Motto versehen, an die Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft einzureichen. Der Name des Verfassers ist in einem mit gleichem Motto versehenen zweiten Umschlage beizufügen.

Die Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft hat die Berechtigung, diejenige Arbeit, der der Preis zuerkannt wird, ohne weiteres Entgelt in ihren Schriften zu veröffentlichen, kann aber auch dem Autor das freie Verfügungsrecht überlassen. Nicht preisgekrönte Arbeiten werden den Verfassern zurückgesandt.

Über die Zuerteilung des Preises entscheidet bis spätestens Ende Februar 1916 die Direktion der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft in Frankfurt (Main) auf Vorschlag einer von ihr noch zu ernennenden Prüfungskommission.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Heidelberg Dr. Hans Baerwald (früher in Darmstadt) für Physik.

Neuer Lehrauftrag: Der Privatdozent für Meßtechnik der drahtlosen Telegraphie an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Bruno Glatzel für die etatsmäßige Vorlesung über Funkentelegraphie an der Militärtechnischen Akademie zu Charlottenburg.

Vom Lehramt zurück: Der Professor der Chemie an der Wesleyan University in Middletown Dr. Walter P. Bradley, der Professor der Chemie am College of Engineering der University of Wisconsin in Madison Charles F. Burgeß.

Gestorben: Der Ehrendirektor der Station agronomique des Institut Pasteur de la Loire-Inférieure in Nantes Professor A. Andouard.

Angebote.

Assistenten

für elektrotechnisches Laboratorium **sucht**

P. Firchow Nachf.

Fabrik elektr. Schaltapparate

Berlin SW., Belle-Alliancestr. 3.

Gesuche.

Promovierter Physiker,

mit besten Zeugnissen und Empfehlungen und vielseitigen Interessen **sucht** Stellung an Universität oder in der Technik. Nebenfächer Mathematik und Chemie. Offerten unter **E. H.** an die Expedition dieser Zeitschrift.

Physiker

sucht Stellung, am liebsten Assistentenstelle, auch leitenden, selbständigen Posten in der Industrie. Im 2. Fall Hochvakuum auf 1 Jahr ausgeschlossen. Angebote unter **S. H. 414** an den Verlag dieser Zeitschrift.

Für die Redaktion verantwortlich i. V.: Privatdozent Dr. Max Born in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.